Ордена Трудового Красного Знамени
Грузинский сельскохозяйственный институт

А. ГВАРАМИЯ

ВВЕДЕНИЕ В КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

$$\neq$$

$$(\forall x)\, P(x)$$

Тбилиси
1974

Ордена Трудового Красного Знамени
Грузинский сельскохозяйственный институт

А. ГВАРАМИЯ

ВВЕДЕНИЕ В КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

$$\neq$$

$$(\forall x)\, P(x)$$

Тбилиси
1974

Методическое пособие печата -
ется по решению ученого совета ин-
ститута.

Редактор
доц. П и ч х а д з е Ш.С.

Современный период развития математики показывает, что оперирование понятиями множества, отображения, числа, функции, логическими по - нятиями (высказывание, предикат) становится необходимостью во всех разделах математики и ее приложений. Язык математической логики яв - ляется основным теоретическим языком любой области познания и служит необходимым средством овладения многими разделами математики и ее приложений.

К сожалению, в существующих учебных пособиях по математике для втузов, элементам теории множеств и математической логики не уделено должного внимания, в то время как эти элементы, несомненно, способст - вуют повышению уровня математической подготовки будущих инженеров.

В данном пособии кратко изложены основные понятия теории множеств и математической логики, которые, по мнению автора, помогут студентам инженерных факультетов более четко осмысливать и запоминать узловые вопросы курса высшей математики.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

§ I. Способы задания множеств. Действия над множествами. 4
§ 2. Отображение множеств. Функция. 8
§ 3. Высказывания. Логические операции. Формулы алгебры логики и их равносильность I2
§ 4. Аксиомы, теоремы. Методы доказательств. I8
§ 5. Множество действительных чисел. 23
§ 6. Элементы логики предикатов. 30
§ 7. Приложения. 40

---

§ - I

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВ. ДЕЙСТВИЯ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Множеством называется совокупность объектов, которые мы объединяем в одну группу (по произвольным признакам). Природа этих объектов не существенна. Понятие множества является исходным понятием в математике и не может быть определено через другие, более простые понятия.

Примеры:

1. Множество всех векторов на плоскости.
2. Все целые положительные числа образуют множество натуральных чисел.
3. Множество студентов в данной аудитории.
4. Множество всех комплексных чисел.
5. Множество всех пространственных тел.

$x \in M$ читается " x есть элемент множества M ". Если x не принадлежит множеству M, то пишут $x \notin M$. Если множество содержит конечное число элементов, то его называют конечным, в противном случае - бесконечным. Множество M, состоящее из элементов $a, b, c, \dots$, записывается

$$M = \{a, b, c, \dots\}.$$

Множество может быть задано

а) перечислением всех его элементов (например, множество цифр $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$)

б) определением через элементы уже известного множества (например, считая известным множество целых чисел $Z = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, можно определить множество M степеней числа 2:

$$M = \{\dots, 2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^2, 2^3, \dots\});$$

в) описанием ограничительного свойства, выделяющего элементы строимого множества A среди элементов более широкого (или основного) множества M. Множество A называется подмножеством множества M (например, $A = \{2,4,6,\dots\}$ есть подмножество таких элементов множества $N = \{1,2,3,\dots\}$, которые делятся на 2).

Множество ϕ, не содержащее никаких элементов, называется пустым множеством, оно является подмножеством любого множества M и порождается свойствами, отличными от всех свойств элементов множества M.

Например, множество квадратов с неравными диагоналями есть пустое множество. Напротив, само множество M является наибольшим подмножеством в себе и может быть задано любым свойством, присущим всем его элементам.

ϕ и M называются несобственными подмножествами множества M, все же остальные подмножества называются собственными подмножествами M.

Пусть A и B два подмножества в M. Если любой элемент из A является элементом из B, то A называется частью B или подмножеством в B и употребляется обозначение $A \subset B$, если же не исключен случай когда $A \subset B$ и $B \supset A$, т.е. когда A и B равны (запись $A = B$), то пишут $A \subseteq B$.

Множеством подмножеств некоторого множества M называется множество, элементами которого являются подмножества множества M, например, для $M = \{a,b,c\}$ множеством подмножеств будет

$$\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{c,b\}, M\}.$$

В общем случае, если M конечно и содержит n элементов, то множество его подмножеств состоит из 2^n элементов.

Новые множества можно задавать при помощи некоторых действий над множествами, которые мы сейчас и определим. Пусть снова A, B - два подмножества основного множества M.

1) Дополнением подмножества A называется новое подмножество $\bar{A}$, которое состоит из всех тех и только тех элементов из M, которые не содержатся в A. Очевидно, что $\bar{\phi} = M$ и $\bar{M} = \phi$.

2) Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и A и B.

3) Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат или A или B, или обоим множествам.

4) Разностью множеств A и B называется такое множество $A \setminus B$, которое состоит из всех тех и только тех элементов множества A, которые не принадлежат B. Легко видеть, что $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

5) Для $\cap, \cup, \setminus$ имеют место следующие свойства:

2) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность)

3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ассоциативность)

4) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$ (идемпотентность)

5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность)

6) $A \cap \Phi = \Phi$, $A \cap M = A$, $A \cup M = M$, $A \cup \Phi = A$

7) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (законы де Моргана)

8) $\bar{\bar{A}} = A$ (инволюция).

Докажем, например $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

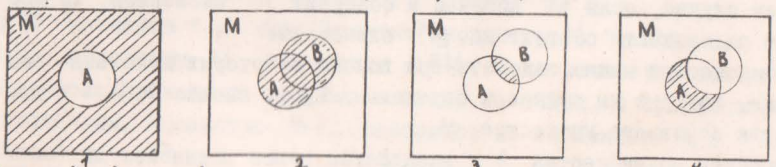
Пусть $x \in A \cup (B \cap C)$. Тогда $x \in A$ или $x \in B \cap C$.

Если $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, а значит $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Если $x \in B \cap C$, то $x \in B$, следовательно $x \in A \cup B$ и $x \in C$, следовательно $x \in A \cup C$. Значит $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Аналогично доказывается, что если $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, то $x \in A \cup (B \cap C)$.

Эти свойства становятся **наглядными**, если воспользоваться следующими диаграммами для иллюстрации действий над множествами. Пусть квадрат изображает основное множество M, а круги внутри квадрата - его подмножества. Тогда заштрихованные области на рис. 1, 2, 3, 4 изображают соответственно множества $\bar{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.



1 2 3 4

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_k$ - подмножества M, причем $M = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_k$ и никакие два из этих подмножеств не пересекаются друг с другом. Тогда говорят, что M разбито на непересекающиеся подмножества $A_1, A_2, \dots, A_k$. Например, множество студентов группы можно разбить на 3 непересекающихся подмножества, состоящие из студентов, которые на вступительных экзаменах получили по математике устно одну и ту же оценку. Множество треугольников разбивается на непересекающиеся множества остроугольных, прямоугольных и тупоугольных треугольников.

Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми множествами. Введем следующие обозначения, которыми будем в дальнейшем пользоваться:

1. Множество всех натуральных чисел - N.
2. Множество всех целых неотрицательных чисел - N_0.
3. Множество всех целых чисел - Z.
4. Множество всех рациональных чисел - R (R^+ - множество всех положительных рациональных чисел)
5. Множество всех действительных чисел - $Д$ ($Д^+$ - множество всех положительных действительных чисел)

6. Множество всех комплексных чисел - K.

7. Множество чисел x, таких, что $a \leqslant x \leqslant b$, где a и b заданные числа - $[a,b]$. (Это множество называется числовым отрезком или сегментом).

8. Множество чисел x, таких, что $a < x < b$ - (a,b) (промежуток или интервал).

9. Множество чисел x, таких, что $a \leqslant x < b$ ($a < x \leqslant b$) - $[a,b)$, $(a,b]$ (полуинтервал или полуотрезок).

10. Числовые множества $[a,+\infty)$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$ называются числовыми лучами.

11. Всюду в дальнейшем через ε и δ будем обозначать сколь угодно малые положительные действительные числа. Пусть a - некоторое действительное число. Промежуток $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ называют ε - окрестностью точки и обозначают через $U(a,\varepsilon)$. Таким образом, записи $x \in U(a,\varepsilon)$ и $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$ означают одно и то же. Но $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$ можно переписать в виде $-\varepsilon < x-a < \varepsilon$, т.е. $|x-a| < \varepsilon$. Итак, вместо $x \in U(a,\varepsilon)$ можно написать $|x-a| < \varepsilon$.

Может оказаться, что элементами множеств являются множества, например, $M = \{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$ есть двухэлементное множество, элементами которого служат множества и можно писать $\{1,2\} \in M$ и $\{3,4,5\} \in M$. Если $M = \{1,2,\{1,2\}\}$, то верны следующие включения $\{1,2\} \in M$ и $\{1,2\} \subset M$.

Упражнения.

1. Опишите каждое из следующих множеств, используя подходящее свойство

1. $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$; 2. $\{3,6,9,12,15\}$;
3. $\{1,4,9,16,25\}$; 4. $\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29\}$;

2. Верно ли, что

а) $\{1,2\} \in \{\{1,2,3\},\{1,3\},1,2\}$?

б) $\{1,2\} \subseteq \{\{1,2,3\},\{1,3\},1,2\}$?

3. Пусть $M = \{\{a\}\}$. Верно ли, что $\{a\} \in M$ и $\{a\} \subseteq M$?

4. Привести пример такого одноэлементного множества B, что для некоторого A одновременно $A \in B$ и $A \subseteq B$.

5. Доказать следующие утверждения

1. Если $A \subset B$, то $A \cap B = A$ и $A \cup B = B$;
2. Если $A \cap B = A$, то $A \subset B$;
3. Если $A \cup B = B$, то $A \subset B$;
4. $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$;

5. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
6. $A \setminus [(A \cap B) \cup (A \setminus B)] = \phi$.

6. Верны ли равенства
1. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;
2. $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$;
3. $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B$.

Если не верны, то в какую сторону имеет место включение ?

7. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если
1. $A = [3,5]$, $B = [2,4]$;
2. $A = [3,5]$, $B = (2,4)$;
3. $A = [3,5]$, $B = [2,4)$;
4. $A = [3,5]$, $B = (2,4]$;
5. $A = (3,5)$, $B = (2,4)$;
6. $A = (3,5)$, $B = [2,4)$;
7. $A = (3,5)$, $B = (2,4]$;
8. $A = (3,5)$, $B = (2,4]$.
9. $A \subset \mathbb{Z}$ состоит из чисел, делящихся на 4, а $B \subset \mathbb{Z}$ состоит из чисел, делящихся на 5.

8. Распространить определение действий пересечения и объединения на случай любой системы множеств.

§ - 2

ОТОБРАЖЕНИЕ МНОЖЕСТВ. ФУНКЦИЯ

Пусть каждому элементу $x \in A$ поставлен в соответствие определенный элемент $y \in B$, который обозначим символом $y = f(x)$. Тогда это соответствие (правило) $y = f(x)$ называется отображением множества A в множество B или функцией с областью определения A, принимающей значения из B. Часто употребительны записи $f: A \to B$ и $A \xrightarrow{f} B$.

Это, конечно, не есть определение функции, ибо понятие функции является начальным понятием математики, которое не может быть определено через более простые понятия. Мы вводим понятие функции, сопоставляя его с другими понятиями: соответствием, правилом и т.д.

Элементы множества A называют значениями аргумента, $f(x)$ называется значением функции или образом x при отображении f. Если $A = B$, то f называется отображением A в себя.

Примеры.

1. Пусть A – множество всех треугольников, $B = \mathbb{R}$. Поставив в соответствие каждому треугольнику его площадь (или периметр), мы получим отображение A в $\mathbb{R}$.

2. Пусть A снова множество всех треугольников, B – множество окружностей. Каждому треугольнику поставим в соответствие вписанную в него (описанную около него) окружность. Мы получим отображение множества треугольников в множество окружностей.

3. $f: n \to n^2$ есть отображение N в себя.

Пусть $f: A \to B$. Совокупность всех элементов вида $f(a)$, где a пробегает все множество A, называется образом множества A и обозначается через $f(A)$. Очевидно, что $f(A) \subseteq B$.

Каждая функция $f: A \to B$ порождает множество пар вида $(x, f(x))$, где $x \in A$, $f(x) \in B$. Это множество пар называется графиком отображения, или функции f.

Это множество пар обладает следующими свойствами:

1. Все элементы A являются первыми элементами пар, т.к. каждому элементу A ставится в соответствие элемент из B;

2. Не существует различных пар с равными первыми элементами, т.е. каждому элементу A ставится в соответствие только один элемент из B. Эти условия означают, что каждый элемент из A является первым элементом точно одной пары.

Если $f(A) = B$, т.е. каждый элемент является образом хотя бы одного элемента из A, то отображение называется сюръективным или отображением A на B.

Если каждый элемент из B является образом не более одного элемента из A, то отображение называется инъективным (из $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$, где $x_1, x_2 \in A$).

Отображение, являющееся одновременно сюръективным и инъективным, называется биективным или взаимно однозначным соответствием.

Если $f: A \to B$ биективное отображение, то можно на $B = f(A)$ определить функцию $x = \varphi(y)$, ставя в соответствие каждому элементу $y \in B$ элемент $x \in A$, такой, что $y = f(x)$. Эта функция называется обратной по отношению к $f(x)$. Обычно обозначают $\varphi = f^{-1}$. Из определения ясно, что $f^{-1}(f(x)) = x$ для всякого $x \in A$, а также, что если f^{-1} отображение, обратное f, то и f – отображение, обратное f^{-1}. f и f^{-1} называют взаимно обратными функциями.

Примеры

I. Пусть $A=\{1,2\}$, $B=\{0,1\}$

Функция , заданная формулой

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x \text{ - четное число}\\ 1, & \text{если } x \text{ -нечетное число}\end{cases}$$

дает взаимно однозначное отображение A на B.

2. Отображение $1\to 2,\ 2\to 4,\ \dots,\ n\to 2n$ является взаимнооднозначным соответствием между N и множеством всех положительных четных чисел.

3. Пусть за каждым столом сидит один студент.

Прямое отображение: студенту ставим в соответствие стол, за которым он сидит. Обратное отображение: столу ставится в соответствие студент, который сидит за этим столом.

4. Пусть A - множество окружностей произвольного радиуса, B - множество точек. Каждой окружности поставим в соответствие ее центр, т.к. каждой точке соответствует бесконечное множество окружностей, то обратного отображения в данном случае не существует (если рассматривать все окружности фиксированного радиуса, то обратное отображение существует).

5. Для функции $f: x\to 2^x$ обратной будет

$$f^{-1}: y\to \log_2 y, \text{ где } y\in(0,\infty).$$

Два множества A и B называются эквивалентными, если существует биективное отображение $A\xrightarrow{f}B$ (обозначение $A\sim B$)

Отношение обладает следующими свойствами:

I. $A\sim A$ (рефлексивность) (достаточно рассмотреть тождественное отображение $f: a\to a$; если $A\xrightarrow{f}B$, и f биективно, то $B\xrightarrow{f^{-1}}A$ тоже биективно)

2. Если $A\sim B$, то $B\sim A$ (симметричность);

3. Если $A\sim B$ и $B\sim C$, то $A\sim C$ (транзитивность) (т.к. $A\sim B$ и $B\sim C$, то существуют биективные отображения $A\xrightarrow{f_1}B$, $B\xrightarrow{f_2}C$. Построим биективное отображение $A\xrightarrow{f}C$ так: с каждым элементом $x\in A$ сопоставим элемент $z\in C$ так, что если $y=f_1(x)$, то $z=f_2(y)$. Это означает, что $f(x)=f_2(f_1(x))$. Отображение f называется суперпозицией (или произведением) отображений f_1 и f_2 . Очевидно, что f биективное отображение, поэтому $A\sim C$.Данное определение суперпозиции сохраняется и для произвольных (не обязательно биективных) отображений.



Пример. Пусть A - множество треугольников, B - множество окружностей, C - множество точек. Каждому треугольнику ставим в соответствие описанную окружность, а каждой окружности ставим в соответствие ее центр. Тогда суперпозицией будет отображение, при котором каждому треугольнику ставится в соответствие центр описанной около него окружности.

Эквивалентным конечному множеству является такое конечное множество, причем эти множества содержат одно и то же число элементов. Каждое натуральное число выражает численность не одного какого-нибудь определенного множества, а целого класса попарно эквивалентных множеств. Так, число 5 выражает общее свойство (численность) всех множеств, эквивалентных, например, множеству пальцев человеческой руки.

Если $A\sim B$ и A - бесконечное множество (этот факт запишем так: $|A|=\infty$) то $|B|=\infty$. Бесконечные эквивалентные множества называются равномощными или имеющими одинаковую мощность (это есть обобщение понятия численности на случай бесконечных множеств).

Если $A\sim N$, то говорят, что A - счетное множество. Итак, счетность множества есть не что иное, как возможность перенумеровать все его элементы при помощи всех натуральных чисел.

Бесконечное множество, не эквивалентное N , называется несчетным множеством, например, множество R счетно, а A - несчетно.

Если $A\xrightarrow{f}B$ и B является числовым множеством, то f называется числовой функцией, если же еще и A является числовым множеством, то эта функция называется числовой функцией числового аргумента.

Упражнения.

I. Построить всевозможные отображения множества $A=\{a,b\}$ в множество $B=\{c,d\}$. Какие из них являются отображениями на множество B ?

2. Выяснить, являются ли биективными следующие отображения:

1. $f_1: x\to y=x^3,\quad x\in A,\ y\in A;$
2. $f_2: x\to y=2^x,\quad x\in A.\ y\in A;$
3. $f_3: x\to y=2^x,\quad x\in A.\ y\in(0,\infty);$
4. $f_4: x\to y=\lg x,\quad x\in(0,\infty).\ y\in A;$
5. $f_5: x\to y=\sin x,\quad x\in A,\ y\in[-1,1]$
6. $f_6: x\to y=\sin x,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].\ y\in[-1,1]$

3. Записать обратные для следующих функций:

1. $f_1 : X \to Y = 3x-5, \quad x \in A;$

2. $f_2 : X \to Y = \sin x, \quad x \in A;$

3. $f_3 : X \to Y = \cos x, \quad x \in [0,\pi];$

4. $f_4 : X \to Y = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

4. Пусть $A = \{1,2,3\}$. Построить всевозможные отображения A на A. Определить суперпозицию любых двух из этих отображений.

5. Доказать, что множество N эквивалентно

а) множеству положительных нечетных чисел;

б) множеству чисел, являющихся полными квадратами.

6. Доказать, что всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

З а м е ч а н и е. Всякое бесконечное множество характеризуется тем, что оно равномощно некоторому собственному подмножеству. В самом деле, пусть $|M| = \infty$. Тогда, на основании задачи 6, M содержит некоторое счетное подмножество $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots a_n \dots\}$. Обозначим $B = M \setminus A$ и определим отображение f M в себя следующим образом: $f(a_n) = a_{n+1} (n = 1,2,\dots); f(b) = b$ для любого $b \in B$. Очевидно, что f есть взаимно-однозначное отображение M на его собственное подмножество $M \setminus \{a_1\}$.

§ - 3

ВЫСКАЗЫВАНИЯ. ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ. ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ И ИХ РАВНОСИЛЬНОСТЬ

Предметом изучения математики являются не абстракции образов реального мира, а категории мышления, способы умозаключений, закономерности логического вывода. В соответствии с этим, объектами ее изучения являются отдельные высказывания, связи между ними, способы определения истинности различных сложных конструкций, составленных из отдельных высказываний. При этом под высказыванием понимается законченная мысль, выраженная словами, о которой можно однозначно сказать, истинна она или ложна. Например, высказываниями будут: "5 – нечетное число", "Сухуми – столица Абхазии", "$3 < 5$", "НОД (18,9)=2", "Сумма внутренних углов треугольника равна 90^0", "Снег– красный" (здесь первые три предложения истины, последние три – ложны). Вопросительные и

восклицательные предложения не являются высказываниями в смысле математики. Очевидно, не следует относить к высказываниям фразы, выражающие субъективные чувства, например, "Люблю математику". Имеются такие предложения-проблемы, вопрос об истинности которых остается по сей день открытым и стало быть они не причисляются к категории высказываний, например, "Для каждого натурального числа n имеется такое простое число $p > n$, что $p+2$ также является простым".

Из отдельных, неразделимых (элементарных) высказываний $a, b, c, \dots$ строятся сложные высказывания с помощью союзов "и", "или", отрицания "не", отношения следования "если ..., то...", отношения равнозначности "тогда и только тогда, когда..." и т.д. Союз "и" ("или") называют конъюнкцией (дизъюнкцией) и обозначают символом $\wedge$ ($\vee$). Отрицание "не a" обозначают через $\bar{a}$. Отношение "если a, то b" называют импликацией (a называется посылкой, b следствием) и обозначают $a \to b$. Отношение "a тогда и только тогда, когда b" называется эквивалентностью и обозначается $a \sim b$.

Если высказывание a истинно(ложно), то будем говорить, что оно имеет значение истинности 1(0).

(Запись $a = 1, a = 0$). Логические операции $-, \wedge, \vee, \to, \sim$ можно задать следующими таблицами истинности

a	b	$\bar{a}$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \to b$	$a \sim b$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Итак, $a \wedge b$ истинно если $a = 1$, $b = 1$ (т.е. a и b оба истинны); $a \vee b = 1$ если по крайней мере одно из высказываний a или b истинно; $a \to b = 0$ если $a = 1$, $b = 0$. $a \sim b = 1$ если a и b имеют одинаковое значение истинности.

Примеры: Пусть "всякий треугольник равнобедренный" – высказывание a, "функция синус четная" – высказывание b.
Тогда $\bar{a} = 1$, $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 0$, $a \to b = 0$, $a \sim b = 0$.

Через $\vee\vee$ обозначается дизъюнкция в исключающем смысле: $a \vee\vee b = 1$ если точно одно из высказываний a и b истинно. Эта логическая операция соответствует союзу "либо".

Пусть $x, y, z, \ldots$ обозначают произвольные элементарные высказывания, т.е. это переменные, которые могут принимать два значения – 1 либо 0.

Всякое элементарное высказывание (постоянное или переменное) назовем элементарной формулой алгебры логики*). Если A, B суть формулы алгебры логики, то $(\bar{A})$, $(A)\wedge(B)$, $(A)\vee(B)$, $(A)\to(B)$, $(A)\sim(B)$ также формулы алгебры логики.

Например, $(((x)\to(y))\sim((\bar{z}\wedge(\bar{x}))\to((0)\wedge(\bar{y}))$ – формула, но $(x)\vee\to(y)$ не есть формула.

Для упрощения записи формул примем следующее правило:

1) вместо $(\bar{A})$ будем писать $\bar{A}$,

2) не будем заключать в скобки элементарные формулы и их отрицания,

3) будем считать, что конъюнкция связывает сильнее дизъюнкции, а конъюнкция и дизъюнкция связывают сильнее, чем импликация и равнозначность.

Например, вместо $(\overline{(\overline{a})\to(y)})\vee((\bar{x})\sim(\bar{y}))\to(\bar{z})\sim(6)$ можем писать

$$\overline{\bar{a}\to y}\vee(\bar{x}\sim\bar{y})\to\bar{z}\sim 6.$$

Всякую формулу $A(x_1,\ldots,x_2)$ можно задать таблицей истинности, состоящей из 2^n строк. Например, формуле $A(x.y.z)=x\wedge(y\vee z)\sim x\wedge y\vee x\wedge z$ $(n=3)$ соответствует таблица

x	y	z	$y\vee z$	$x\wedge(y\vee z)$	$x\wedge y$	$x\wedge z$	$x\wedge y\vee x\wedge z$	$A(x.y.z)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

состоящая из $2^3=8$ строк.

Пусть $x_1,\ldots,x_n$ – совокупность всех переменных элементарных высказываний, содержащихся в формулах A и B.

*) Вместо "формула алгебры логики" говорят также "формула алгебры высказываний" или "формула логики высказываний".

A и B называют равносильными (запись $A\equiv B$), если при любых наборах значений переменных $x_1,\ldots,x_n$ они принимают одинаковые значения истинности.

Для решения вопроса равносильности двух формул составляется таблица истинности, в двух последних столбцах которой и содержатся значения этих формул; если эти столбцы совпадают, то формулы равносильны, например $x_1\sim x_2\equiv\bar{x}_1\sim\bar{x}_2$, что видно из следующей таблицы

x_1	x_2	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$x_1\sim x_2$	$\bar{x}_1\sim x_2$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Равносильными могут оказаться и формулы, зависящие от разных переменных, например $x_1\wedge(x_1\vee x_2)\equiv x_1$, $x_1\wedge\ldots\wedge x_k\wedge 0\equiv y_1\wedge\ldots\wedge y_m\wedge 0$, $x_1\vee\ldots\vee x_k\vee 1\equiv y_1\vee\ldots\vee y_m\vee 1$ (переменные, не влияющие на значение формулы, называются фиктивными, например, в первой из указанных равносильностей x_2 – фиктивное переменное).

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости следующих равносильностей

1. $x_1\wedge x_2\equiv x_2\wedge x_1$
2. $x_1\vee x_2\equiv x_2\vee x_1$

} коммутативность

3. $(x_1\wedge x_2)\wedge x_3\equiv x_1\wedge(x_2\wedge x_3)$
4. $(x_1\vee x_2)\vee x_3\equiv x_1\vee(x_2\vee x_3)$

} ассоциативность

5. $(x_1\vee x_2)\wedge x_3\equiv x_1\wedge x_3\vee x_2\wedge x_3$
6. $x_1\wedge x_2\vee x_3\equiv(x_1\vee x_3)\wedge(x_2\vee x_3)$

} дистрибутивность

7. $x\wedge x\equiv x$
8. $x\vee x\equiv x$

} идемпотентность

9. $x\wedge 1\equiv x$; 10. $x\vee 1\equiv 1$; 11. $x\wedge 0=0$; 12. $x\vee 0=x$;

13. $x\wedge\bar{x}\equiv 0$ – закон противоречия (два отрицающих друг друга высказвания не могут быть одновременно истинными);

14. $x\vee\bar{x}\equiv 1$ – закон исключенного третьего (два отрицающих друг друга высказывания не могут быть одновременно ложными).

I5. $\overline{X_1 \wedge X_2} \equiv \bar{X}_1 \vee \bar{X}_2$

I6. $\overline{X_1 \vee X_2} \equiv \bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2$

законы де Моргана

I7. $\bar{\bar{X}} \equiv X$ – закон двойного отрицания

I8. $X_1 \wedge (X_1 \vee X_2) \equiv X_1$

I9. $X_1 \vee (X_1 \wedge X_2) \equiv X_1$

законы поглощения

20. $X_1 \to X_2 \equiv \bar{X}_1 \vee X_2$;

21. $X_1 \sim X_2 \equiv (X_1 \to X_2) \wedge (X_2 \to X_1)$;

22. $X_1 \vee\vee X_2 \equiv \overline{X_1 \sim X_2}$

Равносильности 20, 21, 22, I5, I6, I7 позволяют для каждой формулы найти равносильную ей, записанную только в операциях $\wedge, \vee, -$, причем так, что знак отрицания стоит только над элементарными переменными (приведенный вид данной формулы). Например,

$$\overline{(X_1 \wedge \bar{X}_2 \to X_1)} \vee X_1 \wedge X_3 \equiv \overline{X_1 \wedge \bar{X}_2} \vee X_1 \vee \overline{X_1 \wedge X_3} \equiv \overline{X_1} \wedge X_2 \vee X_1 \vee X_1 \wedge \overline{X_3} \equiv$$

$$\equiv \overline{X_1} \wedge X_2 \wedge \bar{X}_1 \wedge \overline{X_1 \wedge X_3} \equiv (\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2) \wedge \bar{X}_1 \wedge (\bar{X}_1 \vee \bar{X}_3)$$

Формула, принимающая значение I(0) при всех наборах входящих в нее переменных, называется тавтологией (контрадикцией). Например, $(X_1 \to X_2) \wedge X_1 \to (X_1 \sim X_2)$ – тавтология, а $(X_1 \to X_2) \wedge X_1 \wedge \bar{X}_2$ – контрадикция.

Очевидно, что $A \equiv B$ тогда и только тогда, когда $A \sim B$ есть тавтология. Для формул, содержащих большое количество переменных, табличный способ проверки равносильности становится практически непригодным и этот вопрос решается приведением формул к так называемым нормальным формам. Существует бесчисленное множество тавтологий и каждая из них выражает некоторый закон логики. Например, тавтологии $X \sim X$, $X \to X$ выражают законы тождества, $\overline{X \wedge \bar{X}}$ – закон противоречия, $X \vee \bar{X}$ – закон исключенного третьего, $(X_1 \to X_2) \sim (\bar{X}_2 \to \bar{X}_1)$ – закон контрапозиции и т.д.

Упражнения.

I. Какие из следующих предложений являются высказываниями ?

1. Существует такое X, что $\lg X > 1$.
2. Для любого X $|X| > 0$.
3. Четырехугольник АВСД есть квадрат.
4. $\frac{2}{13}$ – четное число
5. $X + 3X = 5(X-1)^3$.
6. Для любого x $x^2 - 5x + 3 = 0$

2. Из высказываний α – „$7 > 5$“ и β – „$\sin x$ – нечетная функция.“ Составьте конъюнкцию, дизъюнкцию, дизъюнкцию в исключающем смысле, импликацию и равнозначность. Найдите значения их истинности.

3. Вместо многоточия поставьте один из союзов "и", "или", "либо" так, чтобы получилось истинное высказывание:

1. При $\alpha \neq 0 \ldots \beta \neq 0$ $\alpha\beta \neq 0$, α, β – числа.
2. При $\alpha > 0 \ldots \beta > 0$ $\alpha\beta > 0$.
3. Если $\alpha\beta < 0$, то $\alpha < 0 \ldots \beta > 0 \ldots \alpha > 0 \ldots \beta < 0$.
4. Если $\alpha \neq 0$, то $\alpha > \beta \ldots \alpha < \beta$.
5. Площадь треугольника уменьшается от уменьшения основания... высоты.

4. Справедливы ли следующие утверждения ?

1. Ложь не следует из истины.
2. Из ложного следует все, что угодно.
3. Из истинного следует только истинное.
4. Ложное следует только из ложного.
5. Истинное следует из чего угодно.

5. Какие из следующих высказываний отрицают друг друга ?

1. $4 < 7$; $4 > 7$;
2. n – простое число; n – составное число;
3. n – положительное число, n – отрицательное число;
4. n – четное число; n – нечетное число;
5. Прямые α и β пересекаются; прямые α и β параллельны.

6. Составьте таблицы истинности следующих формул

1. $(X_1 \wedge X_2 \to X_2 \wedge X_3) \to \overline{X_1 \wedge \bar{X}_2} \vee \bar{X}_1$; 2. $(\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2 \vee X_3) \sim X_1 \to X_2$;
2. $(X_1 \to (X_2 \to X_3)) \to ((X_1 \to X_2) \to (X_1 \to X_3))$;
3. $\overline{X_1 \vee \bar{X}_2 \wedge X_3} \wedge X_1 \wedge \overline{X_2 \wedge X_3}$.

7. Доказать следующие равносильности

1. $X_1 \vee X_2 \wedge (X_1 \vee \bar{X}_2) \equiv X_1$; 2. $(X_1 \vee X_2) \wedge (\bar{X}_2 \vee X_3) \vee (X_1 \vee \bar{X}_2) \wedge (X_2 \vee X_3) \equiv X_1 \vee X_3$;

3. $\bar{x}_1 \vee x_1 \vee \bar{x}_2 \equiv x_1 \wedge x_2$.

4. $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge x_2 \equiv \bar{x}_1 \vee x_2$.

5. $\overline{x_1 \wedge x_2 \vee \bar{x}_1 \wedge x_3} \vee \bar{x}_2 \wedge x_3 \equiv x_3 \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$ 6. $x_1 \vee x_2 \equiv x_1 \wedge \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \wedge x_2$.

8. Найти приведенный вид следующих формул

1. $\overline{(x_1 \vee x_2 \to x_3) \wedge x_4} \to x_2 \wedge x_3$;

2. $(x_1 \to x_2) \to (\bar{x}_2 \to x_1)$;

3. $\overline{(x_1 \to x_3) \wedge (x_2 \to x_3) \to (x_1 \vee x_2 \to x_3)}$;

4. $(x_1 \sim x_2 \vee \bar{x}_1) \to x_1 \vee \bar{x}_2$.

§ – 4

АКСИОМЫ, ТЕОРЕМЫ. МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Каждая математическая теория изучает множества с теми или иными отношениями элементов, обладающие теми или иными свойствами. Содержание теории заключается в определении одних отношений (или понятий) через другие и в доказательстве одних свойств этих отношений (или понятий) на основании других свойств. Так как, однако, каждое определение лишь сводит данное понятие к другим, а каждое доказательство лишь выводит данное свойство из других, то в любой математической теории должны существовать неопределяемые понятия и отношения между ними и недоказываемые положения, описывающие их свойства. Они называются соответственно основными понятиями, отношениями и аксиомами и, формально говоря, могут выбираться произвольно. Однако в каждой математической теории они выбираются так, чтобы как сами они, так и все их следствия не противоречили объективной реальности. В противном случае построенная теория не найдет себе никакого практического применения.

Если в основу некоторой математической теории положено несколько основных понятий, отношений и аксиом, а все остальные понятия, отношения и их свойства выводятся чисто логическим путем из первых, то говорят об аксиоматическом построении данной теории.

К системе аксиом предъявляются требования непротиворечивости, независимости и полноты. Непротиворечивость – такое свойство системы аксиом, что в теории, построенной при помощи этой системы, никакое высказывание нельзя одновременно доказать и опровергнуть.

Независимость – никакую из аксиом данной системы нельзя доказать при помощи остальных аксиом этой системы.

Система аксиом называется полной, если из двух отрицающих друг друга высказываний, сформулированных исключительно в терминах рассматриваемой теории, по крайней мере одно высказывание может быть доказано в этой теории.

Примером аксиоматической теории служит геометрия Евклида, где точки, прямые и плоскости – объекты, природа которых для формального построения геометрии совершенно безразлична, лишь бы между ними были определены основные отношения ("точка лежит на прямой" и т.д.), удовлетворяющие основным условиям (аксиомам геометрии).

Еще один пример. Пусть для элементов некоторого множества $N_0 = \{\alpha, \beta, c, \dots\}$ установлено отношение "следовать за", удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам):

1. Существует элемент множества N_0, не следующий ни за каким элементом (будем называть его нулем и обозначим через 0).

2. Для каждого элемента α из N_0 существует единственный элемент, следующий за α (обозначив этот элемент через α' условие 2) можем переписать так: $((\alpha = \beta) \to (\alpha' = \beta'))$.

3. Для каждого элемента α из N_0 существует не более одного элемента, за которым следует α $((\alpha' = \beta') \to (\alpha = \beta))$.

4. (Аксиома полной математической индукции). Если N_0' есть подмножество множества N_0, удовлетворяющее условиям

а) $0 \in N_0'$;

б) из $\alpha \in N_0'$ следует $\alpha' \in N_0'$, то N_0' совпадает с N_0.

Множество $\mathcal{N}_0$ назовем множеством целых неотрицательных чисел, а его элементы – целыми неотрицательными числами.

Таким образом, в определении множества целых неотрицательных чисел ничего не говорится о природе элементов множества N_0. Значит, она может быть какой угодно. Выбирая в качестве множества N_0 некоторое конкретное множество, в котором определено некоторое конкретное отношение "следовать за", удовлетворяющее свойствам 1–4, мы получим так называемую интерпретацию (реализацию) данной системы аксиом. Стандартной интерпретацией системы 1–4 является выработанный в процессе исторического развития ряд чисел – символов:

0, 1, 2, 3, 4, . . .

На основе аксиом 1–4 все известные нам из школьного курса арифметики свойства ряда целых неотрицательных (в частности, натуральных) чисел можно получить чисто логическим путем в общем виде,

т.е., опираясь на аппарат математической логики, доказать их. При этом, на первых порах, пока не накопилось достаточно большого фактического материала, основное средство для доказательства различных утверждений дает аксиома 4). На ней основан метод полной математической индукции - один из важнейших в математике. Этот метод состоит в следующем: если некоторое утверждение T, в формулировке которого содержится переменное целое неотрицательное число $n \in N_0$, доказано для $n=0$ и в предположении, что оно верно для $n=k$, доказано для $n=k'$, то утверждение T верно для любого $n \in N_0$.

Доказательство. Пусть N_0' - множество целых неотрицательных чисел, для которых утверждение T верно. Тогда из наложенных условий вытекает

а) $0 \in N_0'$;

б) если $k \in N_0'$, то $k' \in N_0'$.

Отсюда, на основании аксиомы 4), следует $N_0' = N_0$, т.е. утверждение T верно для любого $n \in N_0$, что и требовалось доказать. Итак, доказательство методом полной математической индукции состоит из двух моментов. Сначала проверяется справедливость утверждения для числа 0 (начало индукции). Затем допускают, что это утверждение справедливо для некоторого $n \in N_0$ (предположение индукции) и доказывают, что при таком предположении оно справедливо для числа n'. Очевидно, что индукцию можно начинать не обязательно с нуля. Ее можно начинать с любого натурального числа m. Однако в этом случае утверждение будет доказано лишь для всех натуральных чисел, начиная с m.

Теоремой называется положение или утверждение, устанавливаемое при помощи доказательства, основывающегося или на аксиомах или на доказанных уже положениях. Из предыдущего следует, что аксиомы и теоремы-предложения аксиоматической теории, причем аксиомы-исходные предложения теории, теоремы - предложения, выводимые из аксиом. Таким образом, аксиомы не доказываются не потому, что "они очевидны и не требуют доказательства", а потому, что они - исходные предложения теории (потому не выводимы из других предложений этой теории, хотя "выводимы из самих себя"). Отметим, что леммой называется вспомогательная теорема, применяемая в целях доказательства другой теоремы.

Математические предложения часто формулируются в виде импликации. Если $A \to B$ (если A, то B) выражает некоторую теорему, то

A называется условием, а B - заключением теоремы. Теорема $B \to A$ называется обратной к $A \to B$, теорема $\bar{A} \to \bar{B}$ (если $me A$, то не B) называется противоположной к $A \to B$ и, наконец, теорема $\bar{B} \to \bar{A}$ называется обратно-противоположной к $A \to B$.

Взаимно-обратные теоремы $A \to B$ и $B \to A$ почти не зависят друг от друга: истинность одной из них не влечет ни истинности, ни ложности другой. Однако все же некоторая связь есть, именно: эти теоремы не могут быть одновременно ложными.

Взаимно-противоположные теоремы $A \to B$ и $\bar{A} \to \bar{B}$ также не могут быть одновременно ложными, но по истинности одной из них нельзя судить об истинности или ложности другой.

Теоремы $A \to B$ и $\bar{B} \to \bar{A}$ тесно связаны друг с другом: истинность (ложность) одной из них влечет истинность (ложность) другой. Это значит, что теорема "если A, то B" равносильна теореме "если не B, то не A". Это основано на равносильности

$$A \to B \equiv \bar{B} \to \bar{A}.$$

Высказывание B называют необходимым условием для A, если истинна теорема $A \to B$. Высказывание B называют достаточным условием для A, если истинна теорема $B \to A$.

Если конъюнкция $(A \to B) \wedge (B \to A) \equiv A \sim B$ истинна, т.е. A достаточно для B и в то же время A необходимо для B (иначе: B необходимо для A и в то же время B достаточно для A), то говорят кратко, что "A необходимо и достаточно для B" (или "B необходимо и достаточно для A"), что означает "A равнозначно B". Необходимое и достаточное условие называют признаком. Выражение "необходимо и достаточно" часто заменяют такими же по смыслу выражениями": "Тогда и только тогда", "если и только если", "те и только те", "равнозначно" и т.д.

Примеры.

1. Равенство диагоналей необходимо для того, чтобы четырехугольник был квадратом. Это значит, что если четырехугольник есть квадрат, то его диагонали равны. Однако условие равенства диагоналей не является достаточным условием для того, чтобы четырехугольник был квадратом, т.к. существуют прямоугольники с этим свойством, не являющиеся квадратами.

2. Для того, чтобы $a \mid b : c$ (знак $:$ означает отношение "делится на") достаточно (но не необходимо), чтобы $a : c$.

3. Равенство суммы противоположных углов четырехугольника 180° необходимо и достаточно для того, чтобы около четырехугольника можно было описать окружность.

Рассмотрим наиболее распространенные методы математических доказательств, т.е. доказательств предложений некоторой математической теории. Один из таких методов – метод полной математической индукции мы уже рассматривали.

I. Доказательство с помощью построения цепочки импликаций.

Для доказательства истинности импликации $A \to B$ вводим $K\ (K \geqslant 1)$ новых высказываний $A_1, A_2, \ldots, A_K$, называемых вспомогательными, таких, что каждая из импликаций $A \to A_1$, $A_1 \to A_2, \ldots, A_{K-1} \to A_K$, $A_K \to B$ истинна. Отсюда делаем заключение об истинности $A \to B$.

Действительно, формула $(P_1 \to P_2) \wedge (P_2 \to P_3) \to (P_1 \to P_3)$, где P_1, P_2, P_3 – произвольные формулы, является, как легко проверить, тавтологией, поэтому из истинности высказываний $A \to A_1$ и $A_1 \to A_2$ следует истинность высказывания $A \to A_2$. Затем по той же тавтологии из истинности высказываний $A \to A_2$, $A_2 \to A_3$ получаем истинность высказывания $A \to A_3$. Применяя еще $K-2$ раза указанную тавтологию, убеждаемся в истинности высказывания $A \to B$.

2. Способ доказательства цепочкой эквиваленций.

Доказывается истинность высказывания $A \sim B$. Для этого вводится $K\ (K \geqslant 1)$ новых, вспомогательных высказываний, таких, что каждая из эквиваленций $A \sim A_1$, $A_1 \sim A_2, \ldots, A_{K-1} \sim A_K$, $A_K \sim B$

истинна. Тогда $A \sim B$ – тоже истинное высказывание, в чем мы убеждаемся, рассуждая как выше и используя тавтологию

$$(P_1 \sim P_2) \wedge (P_2 \sim P_3) \to (P_1 \sim P_3)$$

3. Доказательство от противного.

Для доказательства теоремы $A \to B$ предполагаем, что заключение B этой теоремы ложно и выводим отсюда, что условие A теоремы тоже ложно, т.е. фактически доказываем истинность обратно – противоположной теоремы $\bar{B} \to \bar{A}$. Т.к. однако $\bar{B} \to \bar{A} \equiv A \to B$, то справедливость нашей теоремы доказана.

4. Доказательство приведением к абсурду.

Пусть требуется доказать, что некоторое высказывание A истинно. Предполагаем, что истинно $\bar{A}$ и обнаруживаем такое высказывание B, что оказывается возможным, используя факты самой математической теории, доказать истинность двух импликаций: $\bar{A} \to B$ и $\bar{A} \to \bar{B}$, т.е. прийти к тому, что называется абсурдом. После этого делаем заключение об истинности A. В самом деле, легко проверить, что импликация $(\bar{A} \to \bar{B}) \wedge (\bar{A} \to B) \to A$ является тавтологией. Но т.к. доказано, что $\bar{A} \to B$ и $\bar{A} \to \bar{B}$ истинны, то A тоже является истинной, ибо импликация $1 \wedge 1 \to 0$ ложна по определению импликации.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Опровергнуть утверждение "если сумма делится на некоторое число, то каждое слагаемое делится на это число".

2. Сформулируйте посредством связи "если . . .,то" высказывания.
   1. A достаточно для B,
   2. A необходимо для B,
   3. B достаточно для A,
   4. B необходимо для A.

3. Высказывание $A \to B$ ложно. Будет ли 1) A достаточно для B, 2) A не необходимо для B.

4. Выделите условие и заключение теоремы "необходимым свойством прямоугольника является равенство диагоналей".

5. Сформулируйте следующие теоремы посредством связи "если. . . то":

   1. Для делимости многочлена $f(x)$ на линейный двучлен достаточно, чтобы α было корнем этого многочлена;
   2. На 5 делятся те целые числа, которые оканчиваются цифрой 0 или 5;
   3. Комплексные числа равны, если равны соответственно их действительные и мнимые части;
   4. Всякое квадратное уравнение с действительными коэффициентами имеет не более двух действительных корней;
   5. Методом полной математической индукции докажите:

$$1.\ 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2.\ 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$$

$$3.\ 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

§ 5

МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Из курса математики средней школы известно, что существуют несоизмеримые отрезки. Так, например, диагональ квадрата несоизмерима с его стороной. Это означает, что отношение длины диагонали квадрата к

его стороне не выражается никаким рациональным числом. Так, если принять длину стороны квадрата за единицу, то длина диагонали этого квадрата не может быть выражена никаким рациональным числом, иначе говоря, не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. В самом деле, предположим противное, т.е. пусть существуют m и n из $\mathbb{Z}$ такие, что $(\frac{m}{n})^2 = 2$. Не теряя общности можем считать, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима. Имеем $m^2 = 2n^2$, откуда следует, что m^2, а значит и m должны быть четными числами: $m = 2p$ $(p \in \mathbb{Z})$, тогда $4p^2 = 2n^2$, следовательно $2p^2 = n^2$, значит число n^2, а потому и n – четны: $n = 2q$ $(q \in \mathbb{Z})$. Но тогда $\frac{m}{n} = \frac{2p}{2q}$, т.е. дробь $\frac{m}{n}$ оказалась сократимой, что противоречит нашему предположению.

Итак, для построения соизмеримых отрезков множества R недостаточно.

Для большей наглядности сравним множество R с множеством точек на прямой. Возьмем какую-нибудь прямую, выберем на ней точку O (начало отсчета), направление и единицу масштаба OE. Получим числовую ось ℓ.

Сопоставим теперь каждое рациональное число $\frac{m}{n}$ с точкой A оси ℓ, которая является концом отрезка OA длины $\frac{m}{n}$, при этом точку A будем брать справа от точки O, если $\frac{m}{n} > 0$, и слева от O, если $\frac{m}{n} < 0$.

В результате каждое рациональное число будет закреплено за некоторой вполне определенной точки оси ℓ. Однако на оси ℓ останется много таких точек, которым не будет сопоставлено ни одного рационального числа. Примерами таких точек могут служить точка B, отстоящая от точки O на расстоянии, равном длине диагонали квадрата, построенного на стороне OE, а также точка C, отстоящая от точки O на расстоянии, равном длине окружности радиуса OE.

Таким образом, множество точек прямой представляется нам "сплошным", "непрерывным", а множество точек, которым сопоставлены рациональные числа, "разрывным", "имеющим пробелы". Итак, если, расширяя числовые множества $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \subset R$, мы преследовали цель получить возможность вычитать и делить соответственно, то, ставя задачу расширения множества R до $\mathcal{A}$, мы добиваемся получения свойства непрерывности.

Не вдаваясь в детали строгого аксиоматического построения множества действительных чисел, мы соберем вместе все свойства (аксиомы), характеризующие это множество.

Пусть $\mathcal{A}$ есть некоторое множество, в котором любым двум элементам x и y соответствует элемент $x+y \in \mathcal{A}$, называемый их суммой, элемент $x \cdot y \in \mathcal{A}$, называемый их произведением и определено отношение порядка: для любых двух различных элементов $x, y \in \mathcal{A}$ имеет место одно и только одно из отношений $x > y$ (x больше y), или $x < y$ (y – меньше x), или $y > x$ (y больше x), причем для любых $x, y, z \in \mathcal{A}$ имеют место следующие свойства (аксиомы):

I. (коммутативность сложения) $x + y = y + x$;

2. (ассоциативность сложения) $(x+y)+z = x+(y+z)$;

3. (существование нуля) существует единственный элемент (нуль), такой, что $x + 0 = x$;

4. (существование противоположного числа) для любого $x \in \mathcal{A}$ существует единственный элемент $(-x) \in \mathcal{A}$, такой, что $x + (-x) = 0$;

5. (коммутативность умножения) $xy = yx$;

6. (ассоциативность умножения) $(x \cdot y)z = x \cdot (y \cdot z)$;

7. (существование единицы). Существует единственный элемент $1 \in \mathcal{A}$ (единица), отличный от 0, такой, что $x \cdot 1 = x$;

8. (существование обратного числа). Для любого $x \in \mathcal{A}$ существует единственный элемент $\frac{1}{x}$, называемый обратным x, такой, что $x \cdot \frac{1}{x} = 1$;

9. (дистрибутивность умножения относительно сложения) $(x+y)z = xz + yz$;

I0. (транзитивность отношения порядка). Из $x < y$ и $y < z$ следует $x < z$;

II. (монотонность сложения). Из $x < y$ следует $x + z < y + z$;

I2. Из $x > 0$ и $y > 0$ следует $x + y > 0$ и $x \cdot y > 0$.

I3. (аксиома Архимеда). Для любых элементов $x, y \in \mathcal{A}$, где $y > 0$ существует такое натуральное число n, что $ny > x$;

I4. (аксиома непрерывности). Пусть A и B такие подмножества множества $\mathcal{A}$, что для любого $x \in A$ и любого $y \in B$ выполняется $y \geq x$ (y больше x, либо совпадает с ним) (в таком случае говорят, что A левее B). Тогда существует хотя бы один элемент $z \in \mathcal{A}$ такой, что $z \geq x$ для любого $x \in A$ и $y \geq z$ для любого $y \in B$ (z называется разделяющим A и B элементом).

Всякое множество, на котором определены операции сложения и умножения, подчиненные свойствам I – 9), называется полем. Но существует очень много различных полей, например, полем является множество $\{\alpha, \beta\}$ из двух элементов, для которых сложение и умножение определяются равенствами $\alpha + \alpha = \beta + \beta = \alpha$, $\alpha + \beta = \beta + \alpha = \alpha$, $\alpha \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha = \alpha\beta = \alpha$, $\beta \cdot \beta = \beta$

Однако аксиомы Архимеда и непрерывности определяют однозначно определенное поле – поле $\mathbb{A}$ действительных чисел. Элементы поля $\mathbb{A}$ будем называть действительными числами.

Если из $\mathbb{A}$ удалить хотя бы одно действительное число, то аксиома непрерывности уже не имела бы места: пусть A – множество чисел, меньших z, а B – множество чисел, больших z. Тогда ясно, что A расположено левее B, но A и B не разделяются никаким элементом, ибо разделяющий их элемент z мы удалили. Таким образом, аксиома непрерывности и выражает мысль о том, что в множестве $\mathbb{A}$ нет "пробелов". $\mathbb{A}$ называют архимедовски расположенным непрерывным полем.

Сумму $x+(-y)$ обозначают через $x-y$ и называют разностью чисел x и y. Число $a-b$ является единственным решением уравнения $b+x=a$. Если $b\neq 0$, то $a\cdot\frac{1}{b}$ обозначают через $\frac{a}{b}$. Число $\frac{a}{b}$ является единственным решением уравнения $bx=a$. Имеет место равенство $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{ab}$, где $a\neq 0$, $b\neq 0$.

Из аксиом порядка I0), II), I2) вытекают такие следствия для любых $x, y, z\in\mathbb{A}$

а) если $x\leqslant y$ и $y\leqslant z$, то $x\leqslant z$;

б) отношения $x<y$, $x-y<0$, $y-x>0$, $y>x$ эквивалентны;

в) если $x<y$, то $-x>-y$;

г) если $x>0$ и $y<z$, то $xy<xz$;

д) если $x<0$ и $y<z$, то $xy>xz$.

Теперь установим связь между изложенным выше подходом к действительным числам, при котором лишь указываются свойства действий над ними и свойства отношения порядка, и обычным школьным изложением, в котором действительные числа вводятся как бесконечные десятичные дроби.

Возьмем бесконечную дробь (для определенности берем такую дробь со знаком +)

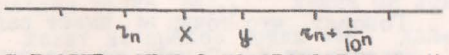
$$\beta,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots=\beta+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{10^n}+\cdots\quad(\beta\in\mathbb{Z},\ \alpha_i\in\{0,1,2,\cdots 9\},\ i=1,2,\cdots)\qquad(1)$$

С этой дробью связаны два числовых множества (под числовым множеством понимается всякое подмножество множества действительных чисел) – множество A, состоящее из конечных десятичных дробей вида $\tau_n=\beta,\alpha_1\cdots\alpha_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$, причем $\tau_0=\beta$., т.е. дробей, полученных отбрасыванием у (1) всех десятичных знаков, начиная с n-го после запятой, и множество B, состоящее из дробей вида $\tau_n+\frac{1}{10^n}$ $(n=0,1,2\cdots)$.

Например, для бесконечной десятичной дроби I,4I42 . . . числа I; I,4; I,4I; I,4I4 входят в множество A; а числа 2; I,5; I,42; I,4I5–

в множество B. Пользуясь правилом сравнения конечных десятичных дробей, легко видеть, что A расположено левее B. Значит, по аксиоме непрерывности, есть хотя бы одно действительное число x, разделяющее эти множества. Покажем, что это число единственное.

Предположим противное – имеются два разделяющих числа – x и y, причем $x<y$. По аксиоме Архимеда найдется такое $n\in\mathbb{N}$, что $10^n(y-x)>1$, а поэтому $y-x>\frac{1}{10^n}$. Так как x разделяет A и B, то $\tau_n<x$, а т.к. y тоже разделяет A и B, то $\tau_n+\frac{1}{10^n}>y$.
Но тогда $y-x<\frac{1}{10^n}$.



Мы пришли к противоречию с неравенством $y-x>\frac{1}{10^n}$. Значит, сделанное предположение неверно и единственность разделяющего действительного числа x доказана. Будем говорить, что бесконечная десятичная дробь (1) выражает это действительное число. При этом τ_n – десятичное приближение числа x по недостатку, а $\tau_n+\frac{1}{10^n}$ – по избытку.

Покажем теперь, что и обратно, каждое действительное число задается некоторой бесконечной десятичной дробью.

Пусть $x>0$. По аксиоме Архимеда найдется такое $\beta\in\mathbb{N}$, что $\beta\leqslant x<\beta+1$. Назовем β целой частью числа x.
Далее, найдется такое $\alpha_1\in\{0.1.2.\cdots.9\}$ что

$$\beta+\frac{\alpha_1}{10}\leqslant x<\beta+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{1}{10}.$$

После этого найдем такое $\alpha_2\in\{0.1.2.\cdots.9\}$, что

$$\beta+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}\leqslant x<\beta+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+\frac{1}{10^2}$$

Продолжая этот процесс, мы получим последовательность конечных десятичных дробей $\beta;\ \beta,\alpha_1;\ \cdots;\ \beta,\alpha_1\cdots\alpha_n;\cdots$, такую, что при любом n имеем

$$\beta,\alpha_1\cdots\alpha_n\leqslant x<\beta,\alpha_1\cdots\alpha_n+\frac{1}{10^n}.$$

Ясно, что число x соответствует бесконечной десятичной дроби

$$\beta,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots$$

Если x является рациональным числом, т.е. если $x=\beta,\alpha_1\cdots\alpha_n$, где $\alpha_n\neq 0$, то, кроме этой конечной десятичной дроби, x можно задать бесконечной смешанной периодической десятичной дробью вида

$$\beta,\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}999\cdots9\cdots=\beta,\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}(9),$$

поэтому, например $0,4\ (9)=0.5$.
Всякое не иррациональное число задается бесконечной непериодической десятичной дробью.

Пусть $x,y\in\mathbb{A}$ и $x\leqslant y$. Тогда x называют минимальным, а y – максимальным. Пишут $x=\min\{x.y\}$, $y=\max\{x.y\}$.

Число $|x| = \max\{x, -x\}$ называют модулем или абсолютным значением числа x. Очевидно, что

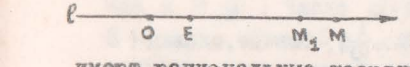
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

В школе доказываются следующие соотношения

$|x+y| \leqslant |x| + |y|$; $\quad |x+y| \geqslant |x| - |y|$;

$|xy| = |x| \cdot |y|$; $\quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$.

Рассмотрим числовую ось ℓ с масштабом OE. Каждому рациональному числу r соответствует определенная точка M оси ℓ.



Говорят, что точка M имеет рациональную координату r. Однако не все точки оси ℓ имеют рациональные координаты.

Точке O поставим в соответствие число нуль. Произвольной точке $M \in \ell$ поставим в соответствие определенное число $x \in \Delta$ указав, каким образом выписывается десятичная дробь

$$x = \beta, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots,$$

Соответствующая точка M (будем рассматривать лишь точки M, лежащие справа от O, т.к. точкам, лежащим слева от O, будут соответствовать отрицательные действительные числа, десятичные знаки $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, которых определяются также, как и для точек справа от O). Число β положим равным наибольшему числу отрезков OE, укладывающихся внутри OM. Если при этом не получается остатка, то полагаем $x = \beta, (0) = (\beta - 1), (9)$ (очевидно, что $\beta, \alpha_1 \ldots \alpha_k (9) = \beta, \alpha_1 \ldots \alpha_k (0) + 10^{-k}$ (например, $3,5(0) = 3,4(9)$), если же получается остаток M_1M по длине меньший, чем OE, то цифру α_1 находим как наибольшее число отрезков $OE_1 = \frac{1}{10} OE$, целиком укладывающихся внутри отрезка M_1M. Если при этом не получается остатка, то полагаем $x = \beta, \alpha_1 (0) = \beta, (\alpha_1 - 1) (9)$, если же получается остаток M_1M_2, то находим цифру α_2, сравнивая M_1M_2 с отрезком $OE_2 = \frac{1}{10} OE_1 = \frac{1}{10^2} OE$.

Продолжая этот процесс, мы получаем возможность определить любую цифру бесконечной десятичной дроби $x = \beta, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$, соответствующей точке M.

Существование и единственность координаты $x \in \Delta$ любой точки $M \in \ell$ вытекает из аксиомы непрерывности для множества Δ: пусть M – любая точка на ℓ, A – множество рациональных чисел r, таких, что точки с координатами r лежат слева от точки M, а B – множество рациональных чисел, таких, что соответствующие им точки лежат справа от M. Тогда по аксиоме непрерывности существует действительное число x, разделяющее A и B, причем, как легко видеть, это число единственное; оно и называется координатой точки M.

Итак, каждой точке $M \in \ell$ соответствует вполне определенное число $x \in \Delta$ – координата точки M.

Ясно, что разные точки оси ℓ имеют различные координаты. Обратно, пусть $x = \beta, \alpha_1 \ldots \alpha_n \in \Delta$. Тогда существует единственная точка $M \in \ell$ с координатой x. Это вытекает из аксиомы непрерывности, которую для прямой линии можно сформулировать следующим образом: пусть $\{M_1M_1', M_2M_2', \ldots, M_nM_n', \ldots\}$ – произвольное множество отрезков M_iM_i' $(i = 1, 2, \ldots)$ оси ℓ, таких, что каждая точка M_{i+1} лежит не левее точки M_i', а каждая точка M_{i+1}' лежит не правее точки M_i' для всех $i = 1, 2, \ldots$ (говорят, что эти отрезки "вложены друг в друга"). Тогда существует точка M, принадлежащая любому из отрезков M_iM_i' $(i = 1, 2, \ldots)$.

Рассуждаем так: пусть $x_n = \beta, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ и $\bar{x}_n = x_n + \frac{1}{10^n}$ – приближения числа x по недостатку и по избытку соответственно.

Всякому рациональному числу $x_n = \beta, \alpha_1 \ldots \alpha_n = \beta, \alpha_1 \ldots \alpha_n (0)$ соответствует определенная точка M_n оси ℓ, такая, что

$$OM_n = \beta \cdot OE + \alpha_1 \cdot \frac{1}{10} OE + \ldots + \alpha_n \cdot \frac{1}{10^n} OE.$$

Аналогично, всякому рациональному числу $\bar{x}_n$ соответствует точка $\bar{M}_n$. Так как $x_n \leqslant x \leqslant \bar{x}_n$ для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ $(x_0 = \beta, \bar{x}_0 = \beta + 1)$, то точка M, соответствующая числу x, будет лежать на отрезке $M_n\bar{M}_n$ при любом $n = 1, 2, \ldots$ Т.к. $x_{n+1} \geqslant x_n$, $\bar{x}_{n+1} \leqslant \bar{x}_n$, то $\{M_1\bar{M}_1, M_2\bar{M}_2, \ldots M_n\bar{M}_n, \ldots\}$ есть множество вложенных отрезков. По аксиоме непрерывности прямой существует точка M, принадлежащая одновременно всем отрезкам $M_n\bar{M}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Не может существовать двух точек M и M', принадлежащих одновременно всем отрезкам $M_n\bar{M}_n$, т.к. длина отрезка $M_n\bar{M}_n$ равна $\frac{1}{10^n}$ части длины OE и при достаточно большом n может быть сделана сколь угодно малой. Итак, действительно, каждому числу $x \in \Delta$ соответствует единственная точка $M \in \ell$ – точка с координатой x. Через $M(x)$ обозначим тот факт, что точка M имеет координату x.

Таким образом, нами установлено взаимно-однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством точек числовой оси. Это соответствие сохраняет порядок: если $x < y$, то $M(x)$ лежит левее точки $N(y)$, причем разность $y - x$ есть длина отрезка MN. Сумма двух отрезков имеет длину, равную сумме длин слагаемых отрезков.

Установленное взаимно однозначное соответствие позволяет отождествлять такие понятия как "числовая ось" и "множество действительных

чисел ", " точка числовой оси " и " действительное число " и т.д.

УПРАЖНЕНИЯ

I. При каких значениях x корень $\sqrt{9-x^2}$ будет иметь действительное значение ?

2. Найти действительные корни уравнений

1. $|x| = -x$; 2. $|2x+3| = x^2$; 3. $|\sin x| = \sin x + 2$.

3. Существуют ли действительные корни уравнения

I $|\sin x| = \sin x + 3$;

2. $|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x + 3$?

4. Пусть $[x]$ обозначает целое число, не превосходящее x (целая часть x).

Найти $[\pi]$, $[-1.5]$, $[0]$, $[0.2]$, $[\sqrt{2}]$.

5. Решить уравнение $[x] = 2x$.

6. Что и по какому свойству следует из 1) $C \subset R$ и $R \subset Д$;

2) $R \subset Д$ и $Д \subset K$?

§ - 6

ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

Каждое элементарное высказывание мы рассматривали как единое нерасчленяемое целое, относительно которого можно однозначно ответить на вопрос истинно оно или ложно, без учета его внутренней структуры. Однако, ведь для конкретного выражения мысли нам необходимо характеризовать предмет с точки зрения его качества или отношения к другим предметам, поэтому логика высказываний недостаточна для построения какой-либо дедуктивной теории в целом, и, в частности, любой математической теории. С этой точки зрения дальнейшим развитием логики высказываний является логика предикатов, в которой помимо нерасчленимых высказываний, рассматриваются такие высказывания, отнесенные к предметам, о которых что-либо высказывается, и выделяющие то, что высказывается об этих предметах.

Пусть имеется некоторое множество M предметов, например $M = Д$. Возможны различные высказывания, характеризующие какие-то качества каждого элемента из Д, скажем "быть целым", "быть иррациональным" и т.д. Высказывания о нескольких предметах из Д выражают отношения между ними, скажем "α кратно β ", "$\alpha+\beta+c=0$" и т.д.

Свойства и отношения между предметами называют предикатами.

Пусть M - произвольное множество предметов. Буквами $a, b, c, \ldots$

будем обозначать элементы этого множества и называть предметными постоянными. Буквами $x, y, z, \ldots$ обозначим предметные переменные (произвольные элементы множества M, "значениями" которых могут служить элементы множества M, т.е. "предметные постоянные". Т.е. M - область значений предметного переменного X, иначе - предметная область.

Предикаты обозначают большими буквами латинского алфавита и скобками с таким количеством "пустых мест", к скольким предметам относится данный предикат, например

$P(\ )$, $Q(,)$, $S(,\ldots,)$ и т.д.

Предикаты с одним пустым местом выражают свойства, а с большим числом пустых мест-отношения. Подставляя на пустое место предметное постоянное, получаем высказывание определенной истинности. Например, если $S(c,a,b)$ читается как "c есть сумма a и b", то $S(4,5,3)$ есть ложное высказывание $4=5+3$, иначе $S(4,5,3) = O(S(5,2,3)) =$ истинное высказывание).

Таким образом, в выражениях $P(x)$, $Q(x,y)$,... каждому из значений переменных $x, y, \ldots$ ставится в соответствие либо 1, либо O, т.е. эти выражения определяют функции от одного, двух и т.д. переменных на M, принимающих только значения 1 и O (двузначные функции). Такие функции называются логическими функциями или одноместными, двухместными... n - местными предикатами. Независимые переменные $x, y, z, \ldots$ могут принимать значения как из одной, так из разных предметных областей. Например, в двухместном предикате "x перпендикулярно y" переменные x и y могут иметь одну область значений - множество прямых или множество плоскостей, но могут иметь и различные области значений, например x - множество прямых, а y - множество плоскостей. Поэтому области значений переменных должны быть точно указаны для каждой логической функции.

Ввиду того, что предикаты, как высказывания, принимают значения 1 и O, к ним применимы логические операции. С помощью этих операций из элементарных предикатов, т.е. предикатов, которые не расчленяются на другие предикаты, формируются сложные предикаты, так же как из элементарных высказываний формируются сложные высказывания.

Рассмотрим применение логических операций к одноместным предикатам, причем для этих предикатов установим теоретико - множественный смысл и дадим их геометрическое изображение. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ - предикаты, определенные на множестве M. $P(x)$ читается так: "x удовлетворяет свойству P ".

Совокупность A тех $x \in M$, которые удовлетворяют свойству P, назовем областью истинности предиката $P(x)$. Кратко тот факт, что A есть область истинности предиката $P(x)$ обозначают так: $A = \{x \in M : P(x)\}$
На множестве M можем определить следующие предикаты:
1. $\bar{P}(x)$, 2. $P(x) \wedge Q(x)$, 3. $P(x) \vee Q(x)$, 4. $P(x) \to Q(x)$, 5. $P(x) \sim Q(x)$, смысл которых получается из определений соответствующих операций над высказываниями

I. $\bar{P}(x)$ обращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях $x \in M$, при которых $P(x)$ обращается в ложное высказывание, т.е. область истинности предиката $\bar{P}(x)$ равна $\bar{A} = M \setminus A$.

Пусть $B = \{x \in M : Q(x)\}$.

2. Область истинности предиката $P(x) \wedge Q(x)$ равна $A \cap B$,

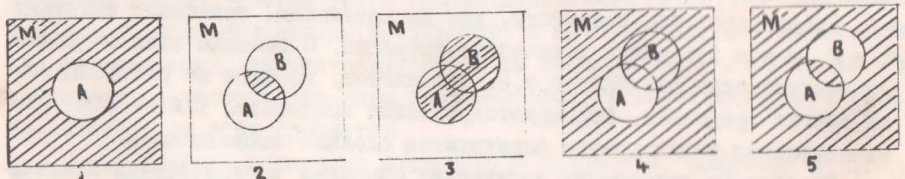
3. Область истинности предиката $P(x) \vee Q(x)$ равна $A \cup B$,

4. $P(x) \to Q(x)$ обращается в ложное высказывание при всех тех и только тех значениях $x \in M$, при которых $P(x)$ обращается в истинное высказывание, а $Q(x)$ – в ложное, т.е. область истинности этого предиката можно рассматривать как объединение $\bar{A} \cup B$ ($\bar{A} \cup B = \{x \in M : P(x) \to Q(x)\}$.

5. $P(x) \sim Q(x)$ обращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях $x \in M$, при которых $P(x)$ и $Q(x)$ обращаются оба в истинные высказывания или оба в ложные высказывания, т. е. область истинности этого предиката можно рассматривать как пересечение областей истинности предикатов $P(x) \to Q(x)$ и $Q(x) \to P(x)$. т.е. эта область равна $(\bar{A} \cup B) \cap (\bar{B} \cup A)$

$$(\bar{A} \cup B) \cap (\bar{B} \cup A) = \{x \in M : P(x) \sim Q(x)\}.$$

На следующих рисунках I – 5 заштрихованные области суть области истинности предикатов I) – 5) соответственно



Пример. Пусть M – множество неотрицательных целых чисел, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ – предикаты на M, имеющие области истинности A_1, A_2, A_3, A_4 соответственно. Если $P_1(x)$ означает „$x^2-5x+6=0$“; $P_2(x)$ — „$x<3$“; $P_3(x)$ — „$x^2=5$“; $P_4(x)$ — „$|x|>0$“; то
$A_1 = \{2,3\}$, $A_2 = \{0,1,2\}$, $A_3 = \phi$, $A_4 = M$.

Для $\bar{P}_2(x)$ область истинности есть $\bar{A}_2 = \{3,4,5,\dots\}$, для
$P_1(x) \wedge P_2(x)$ — $A_1 \cap A_2 = \{2\}$, для $P_1(x) \vee P_2(x)$ — $A_1 \cup A_2 = \{0,1,2,3\}$.
для $P_1(x) \to P_2(x)$ — $\bar{A}_1 \cup A_2 = \{0,1,2,4,5,6,\dots\}$,
для $P_1(x) \sim P_2(x)$ — $(\bar{A}_1 \cup A_2) \cap (\bar{A}_2 \cup A_1) = \{2,4,5,6,\dots\}$.
для $P_1(x) \to P_3(x)$ — $\bar{A}_1 \cup A_3 = \bar{A}_1 \cup \Phi = \bar{A}_1 = \{0,1,4,5,6,\dots\}$.
для $P_3(x) \to P_2(x)$ — $\bar{A}_3 \cup A_2 = M \cup A_2 = M = \{0,1,2,3,4,5,6,\dots\}$.

Логика предикатов в сочетании с логикой высказываний позволяет представлять в формализованном виде весьма широкий круг понятий, образов и различных высказываний, характеризующих свойства предметов и отношений между ними. Приведем ряд примеров.

1. Высказывание "если прямые a и b параллельны и a перпендикулярна плоскости α, то и b перпендикулярна плоскости α" можно записать в виде следующей формулы: (на практике двухместные предикаты "x больше y", "x равно y", "x перпендикулярно y", "x включается в y" будем обозначать „$x>y$“, „$x=y$“, „$x \parallel y$“, „$x \in y$“ соответственно)

$$(a \parallel b) \wedge (a \perp \alpha) \to (b \perp \alpha).$$

2. Рассмотрим высказывание "если студент-отличник учебы и активен в общественной жизни, то он получает повышенную стипендию".

Введем предикаты: $P_1(\ )$ – быть отличником учебы,

$P_2(\ )$ – быть активистом,

$P_3(\ )$ – получать повышенную стипендию.

Наше высказывание можно кратко записать в виде следующей формулы

$$P_1(x) \wedge P_2(x) \to P_3(x).$$

(Формула же $\bar{P}_1(x) \vee \bar{P}_2(x) \to \bar{P}_3(x)$ несет в себе смысл высказывания "если студент не отличник или не активист, то не получает повышенную стипендию).

3. Высказывание " если x и y положительны и $x>y$, то $\frac{xy}{y-x}$ отрицательна" можно записать так

$$(x>0) \wedge (y>0) \wedge (x>y) \to \frac{xy}{y-x} < 0.$$

4. Высказывание "утверждение о том, что из делимости на 2 и 3 следует делимость на 6, равнозначно утверждению, что 2 и 3 – простые числа" запишем так

$$P(x,2) \wedge P(x,3) \to P(x,6) \sim Q(2) \wedge Q(3),$$

где P – означает "делиться",
Q – "быть простым числом"

(заметим, что при словесном выражении символов $P(a,b)$, $Q(a,b,c)$, ... содержащих два и более предметов, предметы называют обычно по порядку занимаемых ими мест, а предикат-отношение ставят между названиями предметов, например у нас $P(x,y)$ - " x делится на y " - эта запись имеет вид xPy).

Логические операции преобразуют „предикаты в предикаты".

Рассмотрим две новые операции, которые преобразуют предикаты и высказывания. Символ $(\forall x)$ называется квантором общности и читается " для всякого x ". Смысл его таков: пусть $P(x)$ - одноместный предикат на множестве M . Тогда под выражением $(\forall x)P(x)$ понимаем высказывание, истинное, если $P(x)$ истинно для всех $x \in M$. Если $P(x)=1$ не для всех $x \in M$, то $(\forall x)P(x)$ ложно. Итак, $(\forall x)P(x)$ не функция, а высказывание, имеющее определенную истинность. Следовательно $(\forall x)P(x)$ от x не зависит. Например, если $P(x)$ - есть " $2x+15<0$ " то $(\forall x)P(x)$ ложное высказывание, если $P(x)$ — „$|\sin x| \leq 1$" то $(\forall x)P(x)$ истинно.

Символ $(\exists x)$ называется квантором существования и читается: для некоторого x (или "существует такое x, что . . ."). Под выражением $(\exists x)P(x)$ понимаем высказывание, истинное, если на M существует хотя бы одно значение x, при котором $P(x)$ - истинно, и ложное, если такого x нет.

Так же как и $(\forall x)P(x)$ выражение $(\exists x)P(x)$ есть высказывание, не зависящее от x . Например $(\exists x)(x^2+2x-10=0)$ - истинное высказывание. $\forall$ и $\exists$ называют двойственными друг другу. Если перед $P(x)$ стоит квантор $(\forall x)$ или $(\exists x)$, то x называется связанной переменной. Если $P(x_1,\dots,x_n)$ n - местный предикат, то может оказаться, что не только одно переменное связано соответствующим квантором, например $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ ((xy)z=x(yz))$

где x и $y \in \Delta$. Читается: „для всяких действительных чисел x, y, z выполняется равенство $(xy)z=x(yz)$" Здесь все переменные-связанные.

Возможны случаи, когда в $P(x_1,\dots,x_n)$ входят переменные, которые не связаны кванторами. Такие переменные называются свободными. Если двухместный предикат $P(x,y)$ связывается квантором только по одной переменной, например $\exists x(5x+y=z)$, то в результате получается не высказывание, а логическая функция от свободной переменной, т.е. одноместный предикат.

Приведем определение формулы логики предикатов.

1. Всякое предметное переменное есть формула.

2. Всякий предикатный символ (имеется ввиду конкретный предикат или переменный предикат, т.е. произвольные свойства и отношения между предметами), в котором все пустые места замещены предметными переменными или предметными постоянными, есть формула.

3. Если $F(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)$ есть формула, то $(\forall x_i)F(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)$ и $(\exists x_i)F(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)$ тоже формулы. В них x_i - связанная переменная, а остальные такие же как и в $F(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)$

4. Если F и Φ - формулы, причем в них нет таких предметных переменных, которые связаны в одной формуле и свободны в другой, то и $\bar{F}$, $F \wedge \Phi$, $F \vee \Phi$, $F \to \Phi$, $F \sim \Phi$ тоже формулы. При этом свободные переменные в F и Φ остаются свободными и во всех остальных указанных формулах.

5. Других формул в логике предикатов нет. Формулы, определенные в пунктах 1 и 2, называются элементарными. Согласно данному определению, выражения $(\forall x)P(x,y,z) \to Q(x,z)$ и $\forall x[P(x,y,z) \to \exists x Q(x,z)]$ не являются формулами. Заметим, что область действия кванторов выделяется скобками. Область действия квантора может относиться как ко всей формуле, так и к ее части. Например, в формуле $(\forall x)[P(x) \vee Q(u) \sim (\exists z)S(z,u)]$ область действия квантора $(\forall x)$ - вся формула, а квантора $(\exists z)$ - лишь часть формулы - $S(z,u)$.

Для упрощения записи формул условимся вместо $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall t)$ писать $(\forall x,y,z,t)$ и вместо $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists t)$ - писать $(\exists x,y,z,t)$

Пользуясь кванторами, можно записать в виде формул следующие 4 вида высказываний относительно одних и тех же свойств S и P - общеутвердительные, частноутвердительные, общеотрицательные и частноотрицательные.

1. Общеутвердительные - "все S суть P " (например, все целые числа рациональны), т.е. для всякого предмета x истинно, что если он обладает свойством S , то обладает и свойством P

$$(\forall x)[S(x) \to P(x)];$$

2. Частноутвердительные - "некоторые S суть P " (например, некоторые четырехугольники - квадраты), т.е. существует предмет x , который обладает свойством S и одновременно свойством P.

$$(\exists x)[S(x) \wedge P(x)].$$

3. Общеотрицательные - "ни одно S не суть P "(например, ни одно натуральное число не является мнимым), т.е. для всякого предмета x если x обладает свойством S , то не обладает свойством P.

$$(\forall x)[S(x) \to \bar{P}(x)];$$

4. Частноотрицательные - "некоторые S не суть P " (например, некоторые треугольники не является равнобедренными), т.е. существует

предмет x, который обладает свойством S и не обладает свойством P.

$$(\exists x)\,[S(x) \wedge \bar{P}(x)].$$

Пользуясь кванторами, легко записать формулы, выражающие смысл выражений "существует по крайней мере один", "не более одного", "точно один", "точно два" и т.д. :

1. $(\exists x)\,P(x)$ – существует по крайней мере один x, удовлетворяющий свойству P.

2. $(\forall x,y)\,[P(x) \wedge P(y) \to x = y]$ – существует не более чем один x, удовлетворяющий свойству P.

3. $(\exists x)\,P(x) \wedge (\forall x,y)\,[P(x) \wedge P(y) \to (x = y)]$ – существует один и только один предмет x, удовлетворяющий свойству P *).

4. $(\exists x,y)\,[P(x) \wedge P(y) \wedge (x \neq y)]$ – существует по крайней мере два предмета x, удовлетворяющие свойству P.

5. $(\forall x,y,z)\,[P(x) \wedge P(y) \wedge P(z) \to (z = x) \vee (z = y)]$ – существует не более двух предметов x и y, удовлетворяющих свойству P.

6. $(\exists x,y)\,[(x \neq y) \wedge P(x) \wedge P(y) \wedge (\forall z)\,[P(z) \to (z = x) \vee (z = y)]$ – существует два и только два предмета x и y, удовлетворяющих свойству P.

Пример. x, y, z – натуральные числа, P – "предшествовать" $(\forall x)\,[(x \neq 1) \to (\exists y) P(y < x) \wedge (\forall z)[P(z < x) \to (z = y)]]$, что означает "для всякого натурального числа, отличного от единицы, существует не более чем одно предшествующее ему натуральное число".

Высказывание "существует не более одного числа такого, что $x + 3 > 5$" можно записать так

$$(\forall x,y)\,[(x+3 > 5) \wedge (y+3 > 5) \to (x = y)].$$

Если две формулы F и Φ логики предикатов принимают одинаковые значения истинности I или 0 при любой замене в обеих формулах переменных предикатов и предметных переменных постоянными значениями этих же величин, то эти формулы называют равносильными (запись $F \equiv \Phi$).

Все равносильности, имевшие место в логике высказываний, переносятся в логику предикатов с заменой в них элементарных высказываний на предикаты. Перечислим ряд важных равносильностей:

*) Через $(\exists!\,x)\,P(x)$ будем обозначать тот факт, что "существует в точности один элемент x, удовлетворяющий свойству P.

1. $P(x) \to Q(x) \equiv \bar{P}(x) \vee Q(x)$;
2. $\overline{P(x) \vee Q(x)} \equiv \overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)}$;
3. $P(x) \vee P(x) \equiv P(x)$;
4. $\bar{\bar{P}}(x) \equiv P(x)$;
5. $P(x) \wedge \bar{P}(x) \equiv 0$;
6. $P(x) \sim Q(x) \equiv [P(x) \to Q(x)] \wedge [Q(x) \to P(x)]$;
7. $(\forall x,y)\,P(x,y) \equiv (\forall y,x)\,P(x,y)$;
8. $(\exists x,y)\,P(x,y) \equiv (\exists y,x)\,P(x,y)$;
9. $\overline{(\forall x)\,P(x)} \equiv (\exists x)\,\bar{P}(x)$;
10. $\overline{(\exists x)\,P(x)} \equiv (\forall x)\,\bar{P}(x)$;

Эти равносильности позволяют для данной формулы найти равносильную ей формулу, которая записана лишь в операциях $\vee, \wedge, \bar{}$ – причем знак отрицания стоит лишь над элементарными высказываниями и предикатами (приведенный вид данной формулы).

Примеры. I) Найти приведенный вид формулы $\overline{(\exists x)[P(x) \to (\forall y)\,Q(y)]}$.

$$\overline{(\exists x)[P(x) \to (\forall y)\,Q(y)]} \equiv \exists x\,\overline{[\bar{P}(x) \vee (\forall y)\,Q(y)]} \equiv (\forall x)\,\overline{[\bar{P}(x) \vee (\forall y)\,Q(y)]} \equiv$$

$$\equiv (\forall x)\,[\bar{\bar{P}}(x) \wedge \overline{(\forall y)\,Q(y)}] \equiv (\forall x)\,[P(x) \wedge (\exists y)\,\bar{Q}(y)].$$

2). Найти отрицание общеутвердительного высказывания. Это высказывание имеет вид $(\forall x)\,[S(x) \to P(x)]$.

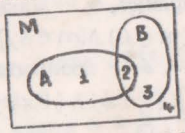
Находим его отрицание: $\overline{(\forall x)\,[S(x) \to P(x)]} \equiv \exists x\,\overline{[\bar{S}(x) \to P(x)]} \equiv$

$$\equiv \exists x\,[\bar{\bar{S}}(x) \wedge \bar{P}(x)] \equiv \exists x\,[S(x) \wedge \bar{P}(x)].$$

это частноотрицательное высказывание.

УПРАЖНЕНИЯ

I. Пусть A и B – области истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ соответственно. Установить, области истинности каких предикатов выражают указанные на чертеже области I, 2, 3, 4



2. Изобразите области истинности следующих предложений, введя предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ на множестве $M = N$.

I. $x > 5$ и $x < 7$;

2. $x \leq 5$ и $x \geq 7$;

3. $x \leq 5$ или $x \geq 7$;

4. $x \leq 5$ и $x < 7$;

5. $x < 5$ или $x < 7$;

6. x - четное и x - нечетное число;

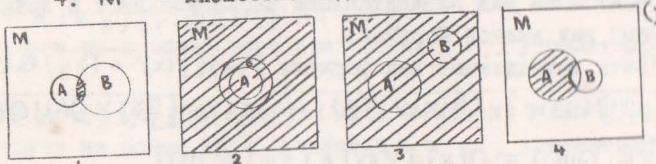
7. x - четное или x - нечетное число;

8. x делится на 6 равнозначно тому, что x делится на 10;

9. x делится на 2 и 3 равнозначно тому, что x делится на 6.

3. Пользуясь словами "все" и "существует" сформулируйте предложения, области истинности которых изображены на следующих рисунках:

1. $M = Д$, $P(x)$ — „$x < 5$", $Q(x)$ — „$x > 3$" (рис.1)
2. $M = Д$, $P(x)$ — „$x \in R$", $Q(x)$ — "x -дробное число (рис.2)
3. $M = Д$, $P(x)$ — „$x \in Д$", $Q(x)$ — " удовлетворяет равенству $x^2 = -1$ (рис.3)
4. M - множество людей, $P(x)$ — "x - студент", x" -отличник (рис.4)



4. Прочитайте следующие формулы

1. x, y, z - числа $P(x,y) \wedge Q(y,z) \to P(x,z)$, P означает "предшествовать", Q -"совпадать",

2. $A \vee \overline{J(x)} \to Д(x)$ где A означает "всякое действительное число является комплексным", J - "быть мнимым числом", $Д$ - "быть действительным числом".

3. $P(\alpha) \wedge P(B) \wedge P(c) \wedge (\alpha \perp c) \wedge (B \perp c) \to \alpha \parallel B$,

где α, B, c - прямые, P означает "принадлежать плоскости $\mathcal{L}$".

4. x, y, z - произвольные рациональные числа

$(\forall x, y)\,[(x < y) \to (\exists z)\,[(x < z) \wedge (z < y)]]$.

5. $\mathcal{L}, \beta$ - плоскости, m - прямая, $\times$ -знак пересечения

$(\forall \mathcal{L}, \beta)\,[(\mathcal{L} \times \beta) \to (\exists m)\,[(m \in \mathcal{L}) \wedge (m \in \beta)]]$.

6. m, ℓ, p- произвольные прямые, $\mathcal{L}$ - произвольная плоскость

$(\forall m, \ell, p, \mathcal{L})\,[(m \in \mathcal{L}) \wedge (\ell \in \mathcal{L}) \wedge (P \in \mathcal{L}) \wedge (\ell \times p) \wedge (m \perp \ell) \wedge (m \perp p) \to (m \perp \mathcal{L})]$

7. A, B, C - точки одной прямой, $\mathcal{L}$ - плоскость

$(\forall A, B, C, \mathcal{L})\,[(A \in \mathcal{L}) \wedge (B \in \mathcal{L}) \to (C \in \mathcal{L})]$.

8. x, y - любые натуральные числа, P - какое-то свойство натурального числа $P(1) \wedge (\forall x)\,[P(x) \to P(x+1)] \to P(y)$.

9. x - произвольная геометрическая фигура, B_y - "быть вертикальными углами", P - "быть равными углами"

$(\forall x)\,[B_y(x) \to P(x)]$.

10. x - произвольное уравнение, K - "быть квадратным уравнением", $Д K$ - "иметь действительные корни"

$(\exists x)\,[K(x) \wedge Д K(x)]$.

12. x - произвольное число. R - "быть рациональным числом"

$(\exists x)\,[R(x) \wedge (x^2 = 2)]$.

12. x, y - произвольные геометрические фигуры; $\Pi\,\Phi$ - быть правильной фигурой", S -"обладать симметрией".

$(\forall x)\,[\Pi\,\Phi(x) \to S(x)] \wedge (\exists y)\,[S(y) \wedge \overline{\Pi\,\Phi}(x)]$.

13. α, B, x, y. - произвольные числа

$(\exists x)\,[(x = \alpha + B) \wedge (\forall y)\,[(y = \alpha + B) \to (y = x)]]$

14. x, y, z - произвольные комплексные числа

$(\exists x, y)\,[(x \neq y) \wedge (x^2 = -3) \wedge (y^2 = -3) \wedge (\forall z)\,[(z^2 = -3) \to (z = x) \vee (z = y)]]$.

15. x, y, z - произвольные числа

$\forall x, y, z\,[(x^2 + px + q = 0) \wedge (y^2 + py + q = 0) \wedge (z^2 + pz + q = 0) \to (z = x) \vee (z = y)]$.

16. α, B, c. - прямые в плоскости, A - точка этой плоскости

$(\forall A, \alpha)\,[(A \in \alpha) \to (\exists B\,[(A \in B) \wedge (B \parallel \alpha)] \wedge (\forall c)\,[(N \in c) \wedge (c \parallel \alpha) \to (c = B)])]$

5. Запишите в виде формул логики предикатов следующие предложения.

1. Существует два и только два числа таких, что $x^2 = 4$.

2. Существует одна и только одна плоскость $\mathcal{L}$, которая проходит через две данные параллельные прямые.

3. Существует одна и только одна прямая α, проходящая через две данные точки.

4. Существует более двух чисел, удовлетворяющих неравенству $x - 2 > 3x + 1$.

5. Для двух чисел α и B существует единственная разность x такая, что $\alpha + x = B$.

6. Найти приведенный вид отрицаний следующих формул:

1. $(\forall x)\ (\exists y)\,[P(x) \vee (\forall z)\,[Q(x,z) \to S(y,z)]]$.

2. $(\forall x,y)[P(x)\wedge Q(y)\to(\exists z)\,Q(z)]$;
3. $(\exists x)[(\forall y)P(y)\to Q(x)]\wedge(\forall y)[(\exists x)Q(x)\to P(y)]$;
4. $(\forall x)(\exists y)[P(x)\sim P(y)]$.

7. Для каждого из следующих высказываний найдите отрицание и кратко сформулируйте его

1. $(\forall x)[(x>0)\vee(x<0)\vee(x=0)]$, X – произвольное число
2. $(\exists x)[(x\in R)\wedge(x^2=2)]$, R – множество рациональных чисел
3. $(\exists x,y)[(x\neq 0)\wedge(y\neq 0)\to(xy)=0]$ x,y – произвольные числа
4. $(\exists x)(\exists y)\,(x+y\neq x)$. x,y – любые целые числа
5. $(\exists x)[(\alpha+\beta=x)\wedge(\forall y)[(\alpha+\beta=y)\to(x=y)]]$ – произвольные числа

8. Найти отрицание следующих высказываний, предварительно записав их в виде формул логики предикатов:

1. Существуют не более чем два числа, удовлетворяющих уравнению $x^2+px+q=0$;
2. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

§ 7

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приведем ряд примеров использования символики математической логики, которые мы встретим при изучении курса высшей математики и ее приложений.

1. Пусть A – числовое множество, т.е. $A\subseteq Д$. A называется ограниченным сверху, или снизу, если

$$(\forall x\in A)(\exists\beta\in A)\,(x\leqslant\beta)$$

или, соответственно,

$$(\forall x\in A)(\exists c\in A)\,(x\geqslant c).$$

Если A ограничено сверху и снизу, то оно называется ограничен – ным. Числа β и c называются соответственно верхней и нижней гранями множества A.

Точной верхней гранью множества A называется наименьшая из всех верхних граней (обозначение: $\sup A$ читается " $supremum$ "). Точной нижней гранью множества A называется наибольшая из всех нижних гра – ней (обозначение: $\inf A$ читается "$infimum$ A ").

2. Пусть $y=f(x)$ функция с областью определения X.

Если $(\forall x\in X)\,(\exists M\in Д^+)(|f(x)|\leqslant M)$ то $f(x)$ называется ограничен – ной функцией.

Если $(\forall M\in Д^+)\,(\exists x\in X)(|f(x)|>M)$ то $f(x)$ называется неограничен – ной функцией.

$(\forall x_1,x_2\in X)\,(x_1<x_2\to f(x_1)<f(x_2))$ – определение возрастающей функции.

$(\forall x_1,x_2\in X)\,(x_1<x_2\to f(x_1)\leqslant f(x_2))$ – $f(x)$ – неубывающая функция.

$(\forall x_1,x_2\in X)\,(x_1<x_2\to f(x_1)>f(x_2))$ – $f(x)$ – убывающая функция.

$(\forall x_1,x_2\in X)\,(x_1<x_2\to f(x_1)\geqslant f(x_2))$ – $f(x)$ – невозрастающая функция

Функция $y=f(x)$ называется монотонной на некотором множестве X, если всюду на нем она либо только возрастает, либо только убывает.

$(\forall x\in X)\,(f(-x)=f(x))$ $f(x)$ – четная функция

$(\forall x\in X)\,(f(-x)=-f(x))$ $-f(x)$ – нечетная функция

Если $(\forall x\in X)\,(x+T\in X\wedge x-T\in X)$, то числовое множество X назы – вается периодическим с периодом T.

Если $f(x)$ задана на периодическом числовом множестве X с периодом T и $(\forall x\in X)\,(f(x+T)=f(x))$, то $f(x)$ называется периоди – ческой с периодом T. Заметим, что тогда $f(x-T)=f(x-T+T)=f(x)$. т.е. $-T$ есть такие период функции $f(x)$. Наименьший положитель – ный период называется основным периодом функции.

3. Отображение $f: N\to A$ называется последовательностью. Стало быть, значения этой функции f могут быть занумерованы и последо – вательность – это переменная величина с нумерованными значениями:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Если $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0)(\forall n\geqslant n_0)(|a_n-a|<\varepsilon)$, то число a называется пре – делом последовательности $a_1,\ldots,a_n,\ldots$ (обозначение $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$).

Отрицание этого определения $(a\neq\lim\limits_{n\to\infty}a_n)$:

$$(\exists\varepsilon>0)(\forall n_0)(\exists n\geqslant n_0)(|a_n-a|\geqslant\varepsilon)\cdot$$

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0)(\forall n_1,n_2)(n_1>n_0\wedge n_2>n_0\to|a_{n_1}-a_{n_2}|<\varepsilon)$$ – признак Коши сходимости последовательности.

Если $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0)(\forall n\geqslant n_0)(|\delta_n|<\varepsilon)$ то последовательность $\delta_1,\ldots,\delta_n,\ldots$ называется бесконечно малой последовательностью (для нее $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$).

Отрицание

$(\lim\delta_n\neq 0)$: $(\exists\varepsilon>0)(\forall n_0)(\exists n\geqslant n_0)(|\delta_n|\geqslant\varepsilon)$.

$(\forall M\in Д^+)(\exists n_0)(\forall n\geqslant n_0)(|a_n|>M)$ – определение бесконечно большой последовательности $a_1,\ldots,a_n,\ldots$

Отрицание: $(\exists M\in\mathcal{A}^+)(\forall n_0)(\exists n\geq n_0)(|a_n|\leq M)$.

$(\forall M\in\mathcal{A}^+)(\exists n_0)(\forall n\geq n_0)(a_n>M)\to \lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$.

$(\forall M\in\mathcal{A}^+)(\exists n_0)(\forall n\geq n_0)(a_n<-M)\to \lim a_n=-\infty$.

4. $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0)(\forall x>n_0)(|f(x)-b|<\varepsilon)\xrightarrow{n\to\infty} \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$

отрицание $(b\neq \lim\limits_{x\to\infty} f(x)):(\exists\varepsilon>0)(\forall n_0)(\exists x>n_0)(|f(x)-b|\geq\varepsilon)$.

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\neq a)(|x-a|<\delta\to|f(x)-A|<\varepsilon)\to \lim\limits_{x\to a} f(x)=A$

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x)(a-\delta<x<a\to|f(x)-A|<\varepsilon)\to \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x=A=f(a-0)$

– определение предела слева.

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x)(a<x<a+\delta\to|f(x)-A|<\varepsilon)\to$

$\to \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=A=f(a+0)$ – определение предела справа

$(\forall M\in\mathcal{A}^+)(\exists\delta>0)(\forall x\neq a)(|x-a|<\delta\to f(x)>M)\to \lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$

$(\forall M\in\mathcal{A}^+)(\exists\delta>0)(\forall x\neq a)(|x-a|<\delta\to f(x)<-M)\to \lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x)(|x-a|<\delta\to|f(x)-f(A)<\varepsilon$ – определение непрерывности функции $f(x)$ в точке $x=a$.

Найдем отрицание последней формулы: $\overline{(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x)(|x-a|<\delta)\to}$

$\overline{\to|f(x)-f(a)|<\varepsilon)}\equiv(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x)(\overline{|x-a|<\delta\vee|f(x)-f(a)|<\varepsilon})\equiv$

$\equiv(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x)(\overline{|x-a|<\delta}\wedge\overline{|f(x)-f(a)|<\varepsilon})\equiv$

$\equiv(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x)(|x-a|<\delta\wedge|f(x)-f(a)|\geq\varepsilon$ – определение разрывности функции $f(x)$ в точке $x=a$

$(\forall\varepsilon>0)(\forall x_0\in[a,b])(\exists\delta>0)(\forall x\in[a,b])(|x-x_0|<\delta\to|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$

– определение непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫХ СХЕМ

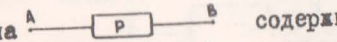
Бурное развитие вычислительной техники и численных методов анализа, проникновение их в различные естественные и гуманитарные науки во многом обязано математической логике. Методы последней используются, например, в конструировании электронных цифровых и аналоговых вычислительных машин, в разработке алгоритмов решения инженерно – расчетных задач и математического моделирования, в программирования, минимизации и автоматизации программ и т.д.

В технике автоматического управления и вычислительных машин приходится иметь дело с релейно-контактными и электронно-ламповыми схемами (их в общем случае называют переключательными схемами), содержащими множество реле, электронных ламп, полупроводников и магнитных

элементов. Описанию и конструированию таких схем может служить логика высказываний: каждой схеме ставится в соответствие формула логики высказываний и каждая формула реализуется с помощью некоторой схемы. Это позволяет выявить возможности заданной схемы, изучая соответствующую ей формулу, упрощение схемы свести к упрощению соответствующей формулы (решение подобного рода задач называется анализом схемы) и построить схему, заранее описав с помощью формулы те функции, которые схема должна выполнять (синтезирование схемы).

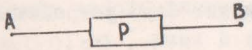
Рассмотрим вопрос о связи между логикой высказываний и переключательными схемами. Под переключательной схемой в общем случае понимают схематическое изображение некоторого устройства, состоящего из переключателей, которые могут быть механически действующими устройствами (выключатели, переключающие ключи, кнопочные устройства и т.д.) электромагнитными реле, электронными лампами, полупроводниковыми элементами и т.д. и соединяющие их проводники (другие элементы, применяемые в устройствах, такие как сопротивления, конденсаторы и другие на переключательных схемах не изображаются), а также входов и выходов (клеммы, на которые подается и снимается электрическое напряжение).

Переключательная схема принимает в расчет только два состояния каждого переключателя, которые в общем случае будем называть "замкнутым" и " разомкнутым" (проводит и не проводит ток, понижает или повышает напряжение и т.д.).

Простейшая схема 

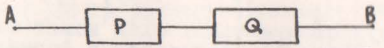
содержит один переключатель P, один вход A и один выход B (A и B называют полюсами схемы). Переключателю P поставим в соответствие переменное высказывание P, глагольное "переключатель P замкнут". Если P истинно, т.е. P=1, то имеющее импульс, поступивший на полюс A, может быть снят на полюсе B без потери напряжения.

Схема проводит ток. Если P=0, то это означает, что переключатель разомкнут, и схема тока не проводит, или, что на полюсе B снимается минимальное напряжение при подаче на полюс A максимального напряжения.

Если принять во внимание не смысл высказывания, а только его значение, то можно считать, что любому элементарному высказыванию может быть поставлена в соответствие переключательная схема вида 

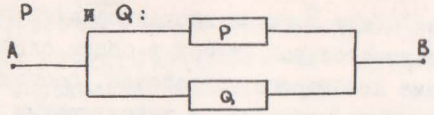
. Неэлементарным формулам также могут быть поставлены в соответствие переключательные схемы.

Конъюнкция двух переменных элементарных высказываний P и q изобразится двухполюсной схемой:



с последовательным соединением P и Q. Эта схема пропускает ток только в том случае, когда P и Q истинны, т.е. когда истинна конъюнкция $P \wedge Q$.

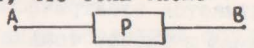
Дизъюнкция двух переменных элементарных высказываний P и q изображается двухполюсной схемой с параллельным соединением переключателей P и Q:

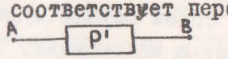


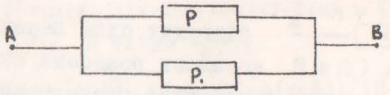
Эта схема проводит ток, тогда истинно P или q, или P и q истинны одновременно, т.е. тогда истинна дизъюнкция $P \vee q$.

Переключатели не всегда действуют независимо друг от друга. Два переключателя P и P' могут быть связаны так, что когда P замкнут, то P разомкнут, и наоборот.

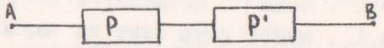
Это означает, что если схеме



с переключателем P соответствует переменное элементарное высказывание P, то схеме  должно быть поставлено в соответствие $\bar{P}$, являющееся отрицанием P. С учетом этого, например схема



всегда проводит ток, а схема



никогда не проводит ток, т.к. для всякой формулы существует ее приведенный вид, ясно, что всякую формулу можно изобразить переключательной схемой, и устройство, являющееся физической реализацией этой схемы, может быть использовано для построения таблицы истинности данной формулы. Очевидно также, что для любой переключательной схемы может быть найдена формула, которая изображалась бы этой схемой.

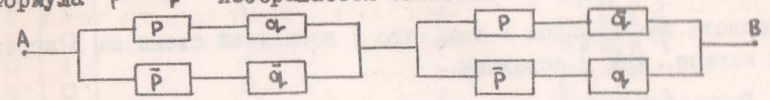
Если процесс автоматического управления некоторым объектом может быт записан с помощью формулы логики высказываний, то соответствующая этой формуле переключательная схема определит само устройство автоматического управления этим объектом.

Всей переключательной схеме ставится в соответствие переменная, которая равна I, если схема проводит ток, и 0 – в противном случае. Очевидно, что эта переменная является двузначной функцией (принимает лишь 2 значения – 0 или I) от переменных высказываний, соответствующих переключателям данной схемы. Эта функция называется функцией проводимости схемы, а ее таблица истинности – условиями работы схемы. Переключательные схемы называются равносильными, если соответствующие им формулы равносильны.

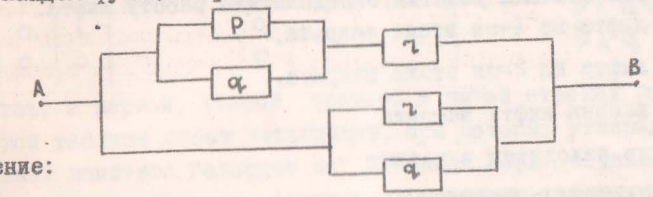
Примеры.

Договоримся обозначать одними и теми же буквами переключатели и соответствующие им переменные элементарные высказывания.

I. Формула $P \sim q$ изображается схемой



2. Найдем функцию проводимости и условия работы следующей схемы



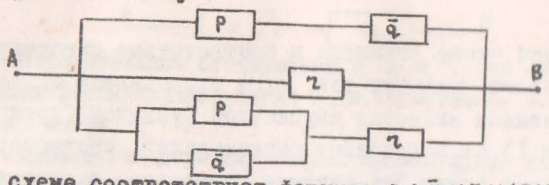
Решение:

$f(P,q,\tau) = ((P \vee q) \wedge \tau) \vee (\tau \vee q)$ есть функция проводимости данной схемы,

P	q	τ	$P \vee q$	$(P \vee q) \wedge \tau$	$\tau \vee q$	$f(P,q,\tau)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

– условия работы данной схемы. (Можно было короче написать $f(0,0,0) = f(1,0,0) = 0$, имея в виду, что в остальных случаях $f(P,q,\tau) = 1$.

3. Упростить схему

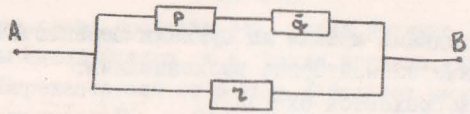


Этой схеме соответствует формула $p \wedge \bar{q} \vee \neg \vee (p \vee \bar{q}) \wedge \neg$

Упростим эту формулу равносильными преобразованиями:

$p \wedge \bar{q} \vee \neg \vee (p \vee \bar{q}) \wedge \neg \equiv p \wedge \bar{q}$ -(воспользовались равносильностью $x \vee x \wedge y \equiv x$)

Итак, данная схема равносильна следующей, более простой, схеме



Простота заключается в том, что у последней схемы на 3 переключателя меньше, чем у исходной.

4. Построить схему управления спуском лифта со второго этажа на первый. Сформулируем сначала условия, определяющие работу лифта.

P_1 – дверь лифта на I-ом этаже закрыта,

P_2 – дверь лифта на 2-ом этаже закрыта,

P_3 – дверь кабины лифта закрыта

Q – пассажир находится в кабине

R_1 – кнопка спуска в кабине лифта нажата

R_2 – кнопка вызова на I-м этаже нажата

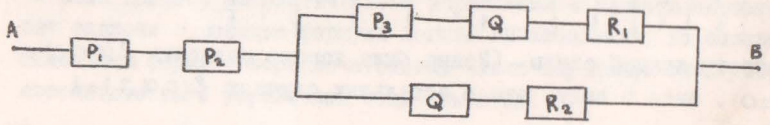
Условия спуска можно теперь представить в виде следующей формулы:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q \wedge R_1 \wedge P_2 \wedge P_2 \wedge \bar{Q} \wedge R_2 \wedge (P_3 \vee \bar{P}_3)$$

Эта формула равносильна следующей формуле

$$P_1 \wedge P_2 \wedge (P_3 \wedge Q \wedge R_1) \vee (\bar{Q} \wedge R_2)$$

По этой формуле теперь можем составить схему, реализирующую процесс спуска:



5. Комитет из трех человек хочет применить электрическую схему для регистрации тайного голосования простым большинством голосов. Построим такую схему, чтобы каждый член, голосующий "за", нажимал кнопку, и не нажимал ее, если он голосует против, и чтобы в случае, если большинство членов комитета проголосует "за", загоралась сигнальная лампочка.

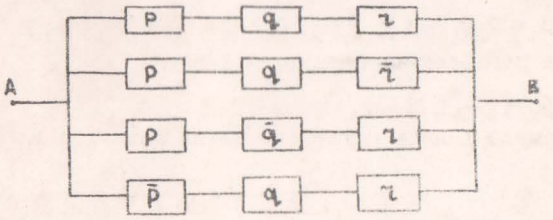
Пусть P означает "первый член комитета голосует за", q – второй член комитета голосует за" и $\neg$ – третий член комитета голосует за". Таблица истинности высказывания "большинство членов комитета голосует за" будет такой:

P	q	$\neg$	Желаемое значение истинности	Соответствующая формула
1	1	1	1	$P \wedge q \wedge \neg$
1	1	0	1	$P \wedge q \wedge \bar{\neg}$
1	0	1	1	$P \wedge \bar{q} \wedge \neg$
1	0	0	0	$P \wedge \bar{q} \wedge \bar{\neg}$
0	1	1	1	$\bar{P} \wedge q \wedge \neg$
0	1	0	0	$\bar{P} \wedge q \wedge \bar{\neg}$
0	0	1	0	$\bar{P} \wedge \bar{q} \wedge \neg$
0	0	0	0	$\bar{P} \wedge \bar{q} \wedge \bar{\neg}$

Итак, в первой, второй, третьей и пятой строках последнего столбца этой таблицы стоят конъюнкции, при которых утверждение "большинство членов комитета голосует за" истинно. Беря дизъюнкцию этих конъюнкций, получим следующую формулу, выражающую процедуру голосования

$$P \wedge q \wedge \neg \vee P \wedge q \wedge \bar{\neg} \vee P \wedge \bar{q} \wedge \neg \vee \bar{P} \wedge q \wedge \neg$$

Этой формуле соответствует следующая искомая схема



შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი
საქართველოს სასოფლო-სამეურნეო ინსტიტუტი

ა. გვარამია

უმაღლეს მათემატიკის
კურსში შესავალი

ЗИ00215. Подп. к печ. 8.УП.1974 г. ГИСХ ОПП.г.Сухуми.
Тираж 600. Заказ № 265.

1-ноября „Векторная алгебра", Прямая и пл-ти в пространстве".
7-декабря „Непрерывные функции и производные".